DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Babamın Anısına...

ve Aileme...

Erhan GÜLER

Bu dersin ana konusu ;

diferansiyel denklemlerin çözümlerini ve bazı özelliklerini tartışmaktır. Bazı özel metodları incelemek ve bazı durumlarda yaklaşık çözümleri oluşturmaktır.

– I. BÖLÜM –

Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Fizikî bilimlerde, mühendislikte, sosyal bilimlerde, birçok önemli problem, matematiksel terimlerle formüle edildiğinde, bir fonksiyonun belirlenmesine ihtiyaç duyulur. Bilinen bir problemi formüle eden bu matematiksel ifadeler, bazen aranan fonksiyonun en azından birinci mertebe veya daha yüksek mertebeden türevlerini içermektedir. İşte bu çeşit matematiksel ifadelere diferansiyel denklem denir.

Örneğin, $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 5x$ bir diferansiyel denklemdir.

Adî ve Kısmî Diferansiyel Denklemler

Bir diferansiyel denklemde bir veya daha fazla sayıda bağımlı değişken olmasına karşın, eğer yalnız bir bağımsız değişken var ise bu denkleme adî diferansiyel denklem denir. Bağımlı değişkenin tek olması halinde, genellikle bağımsız değişken x ile, bağımlı değişken y ile gösterilir. Eğer diferansiyel denklem, birtek bağımlı değişkenin iki veya daha fazla sayıda bağımsız değişken cinsinden türevlerini içeriyorsa, bu tip denklemlere kısmî diferansiyel denklem denir.

Örneğin, $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2y}{dz^2} = 0$ $y(x,z)$ kısmî diferansiyel denklemdir.

Mertebe :

Bir diferansiyel denklemin mertebesi, denklemde bulunan en yüksek mertebede türevin mertebesidir.

$F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$ n. mertebedendir.

$y'' + (y')^4 = 0$ ikinci mertebedendir. Kabul edelim ki,

$$y^{(n)} = f(x,y,\dots,y^{n-1}) \quad \dots\dots (2)$$

olsun ve çözümü var olsun.

Çözüm// $\alpha < x < \beta$ aralığı üzerinde (2) adi diferansiyelin çözümü bir ϕ fonksiyonudur. Öyle ki; $\phi', \phi'', \ldots, \phi^{(n)}$ var ve

$$\phi^{(n)}(x) = f(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{n-1}(x))$$

eşitliğini $\forall x \in (\alpha, \beta)$ için sağlar.

Bir diğer şekilde verilmediği zaman f nin, reel değerli fonksiyon olduğunu kabul edeceğiz ve reel çözümleri bulmaya çalışacağız.

Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler

$$F(x, y, y', \ldots, y^{n)}) = 0$$

denklemine lineerdir denir. Eğer F; $y, y', \ldots, y^{(n)}$'ye göre lineer ise, bu tanıma göre en genel anlamda n'inci mertebeden lineer diferansiyel denklem;

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x)$$

şeklindedir.

- $1+x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ lineerdir.
- $1+y^2 \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ değil.
- $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ değil
- $\frac{d^2y}{dx^2} + \sin(x+y) = 0$ değil
- $\frac{d^2y}{dx^2} + y^2 = 0$ değil.

Alıştırmalar

1- Aşağıda verilen fonksiyonların, verilen diferansiyel denklemleri sağladığını gösteriniz.

a) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ $\quad y_1(x) = \sin x \quad y_2(x) = \cos x$

b) $y'' + y = \sec x \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad y_1(x) = \cos x \ln \cos x + x \sin x$

Çözüm b// $y' = -\sin x \ln \cos x + \frac{-\sin x}{\cos x} \cos x + \sin x + (\cos x)x$

$$y' = -\sin x \ln \cos x - \sin x + \sin x + x \cos x$$

$$y' = -\sin x \ln \cos x + x \cos x$$

$$y'' = -\cos x \ln \cos x + \frac{-\sin x}{\cos x}(-\sin x) + \cos x + x(-\sin x)$$

$y''+y = \sec x$?

$$= -\cos x \ln\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x - x\sin x + \cos x\ln\cos x + x\sin x$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x \;//$$

2- Kabul edelim ki, aşağıdaki diferansiyel denklemler $y=e^{xr}$ formunda çözüme sahip olsunlar. Verilen herbir diferansiyel denklem için uygun r değerlerini bulunuz.

a) $y''-3y'+y=0$

b) $y''-y'+3y=0$

c) $y''+y=0$

Çözüm a// $y=e^{xr} \Rightarrow y'=re^{xr} \Rightarrow y''=r^2e^{xr}$

$$y''-3y'+y = r^2e^{xr}-3re^{xr}+e^{xr} = e^{xr}(r^2-3r+1)=0$$

$$r^2-3r+1=0 \Rightarrow r_{1/2} = \frac{6\mp\sqrt{2}}{2} \;//$$

3- Kabul edelim ki, aşağıdaki diferansiyel denklemler $y=x^r$ $(x>0)$ formunda çözüme sahip olsunlar. Verilen herbir diferansiyel denklem için uygun r değerlerini bulunuz.

a) $x^2y''-3xy'+y=0$

b) $x^2y''-xy'+3y=0$

c) $x^2y''+y=0$

Çözüm c// $y=x^r \Rightarrow y'=rx^{r-1} \Rightarrow y''=r(r-1)x^{r-2}$

$$x^2y''+y = x^2r(r-1)x^{r-2}+x^r = x^r(r(r-1))=0$$

$$r(r-1)=0 \Rightarrow r_1=0,\; r_2=1$$

4- $u_1(x,y)=\cosh\cosh y$, $u_2(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, $u_{xx}+u_{yy}=0$ $\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0\right)$ Laplace denkleminin çözümleri olduğunu gösteriniz.

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{2x}{x^2+y^2},\quad \frac{d^2u_2}{dx^2} = \frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \;//$$

$$\frac{du_2}{dy} = \frac{2y}{x^2+y^2},\quad \frac{d^2u_2}{dy} = \frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \;//$$

– II. BÖLÜM –

Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde, $y' = f(x,y)$ ---. (1)

şeklindeki diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerinde duracağız.

$$y' = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow y = \int^x f(t)\,dt + c$$

$y' + P(x)y = g(x)$ ---- (2)

f, y'ye göre bir denklem ise bu durum elde edilir. Kabul edelim ki, $g(x)=0$ olsun. ve $P(x)$ sabit olsun. $y'+ay=0$ olur. Bu taktirde,

$y'+ay=0 \Rightarrow y=e^{-ax}$ yazarsak,

$= -ae^{-ax} + ae^{-ax} = 0$ olur.

$$y'+ay=g(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}[\ ?\ ] = g(x) \Rightarrow [\ ?\ ] = \int^x g(t)\,dt + c$$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}[b(x)y] = b(x)y' + b'(x)y$ $\qquad b(x) = e^{ax}$

$\Rightarrow b(x)y' + a\,b(x)y = g(x)b(x)$ $\qquad$ (denklemi $b(x)$ ile çarparak)

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[e^{ax}y] = g(x)e^{ax}$$

$\Rightarrow e^{ax}y = \int^x g(t)e^{at}\,dt + c \Rightarrow y = \frac{1}{e^{ax}}\left(\int^x g(t)e^{at}\,dt + c\right)$ olur.

Örnek// $y' - 3y = \sin x$ denklemini çözünüz.

$b(x) = e^{-3x}$ dersek, $y'e^{-3x} - 3e^{-3x}y = e^{-3x}\sin x$

$$\frac{d}{dx}[e^{-3x}y] = e^{-3x}\sin x$$

$$\Rightarrow e^{-3x}y = \int^x e^{-3t}\sin t\,dt + c \Rightarrow y = e^{3x}\left(\int^x e^{-3t}\sin t\,dt + c\right)$$

$\int^x e^{-3t}\sin t\,dt = ?$ $\qquad \left(\int u\,dv = uv - \int v\,du\right)$

$u = \sin t$ $\qquad e^{-3t}dt = dv$ $\qquad = \sin t\left(-\frac{1}{3}e^{-3t}\right) + \int^x \frac{1}{3}e^{-3t}\cos t\,dt$

$du = \cos t\,dt$ $\qquad -\frac{1}{3}e^{-3t} = v$ $\qquad = -\frac{1}{3}e^{-3t}\sin t + \frac{1}{3}\int^x \boxed{e^{-3t}\cos t\,dt}$

$e^{-3t}dt = dz$ $\qquad s = \cos t$

$-\frac{1}{3}e^{-3t} = z$ $\qquad ds = -\sin t\,dt$

$$\int^x e^{-3t}\cos t\,dt = \cos t\left(-\tfrac{1}{3}e^{-3t}\right) - \int^x -\tfrac{1}{3}e^{-3t}(-\sin t)\,dt$$

$$= -\tfrac{1}{3}e^{-3t}\cos t - \int^x \tfrac{1}{3}e^{-3t}\sin t\,dt$$

$$\int^x e^{-3t}\sin t\,dt = -\tfrac{1}{3}e^{-3t}\sin t + \tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{1}{3}e^{-3t}\cos t - \int \tfrac{1}{3}e^{-3t}\sin t\,dt\right)$$

$$= -\tfrac{1}{3}e^{-3t}\sin t - \tfrac{1}{9}e^{-3t}\cos t - \tfrac{1}{9}\int e^{-3t}\sin t\,dt$$

$$\tfrac{10}{9}\int e^{-3t}\sin t\,dt = -\tfrac{1}{3}e^{-3t}\sin t - \tfrac{1}{9}e^{-3t}\cos t$$

$$\int e^{-3t}\sin t\,dt = -\tfrac{3}{10}e^{-3t}\sin t - \tfrac{1}{10}e^{-3t}\cos t$$

$$\Rightarrow y = e^{3x}\left(-\tfrac{3}{10}e^{-3x}\sin x - \tfrac{1}{10}e^{-3x}\cos x\right) + c$$

$$= -\tfrac{3}{10}\sin x - \tfrac{1}{10}\cos x + c = -\tfrac{1}{10}(3\sin x + \cos x) + c \;//$$

Ödev // $(y+1)\frac{dy}{dx} = (y^2+2y+5)x^2$ denklemini lineer duruma getirip çözünüz.

$y' + ay = g(x)$, $y' + p(x)y = g(x)$

$\Rightarrow \mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x)$ ..... (1)

$\Rightarrow \frac{d}{dx}[\,?\,] = \mu(x)g(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu'(x)y + \mu(x)y'$ .... (2)

$\Rightarrow \mu'(x) = \mu(x)p(x) \Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x) \Rightarrow \ln\mu(x) = \int^x p(t)\,dt$

$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int^x p(t)\,dt}$ ...... (3) $\mu(x)$: integral çarpanı.

$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)g(x) \Rightarrow \mu(x)\cdot y = \int^x \mu(t)g(t)\,dt + c$

$\Rightarrow y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int^x \mu(t)g(t)\,dt + c\right]$

Örnek // $y' + 3xy = x^3$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\mu(x) = e^{\int^x 3t\,dt} = e^{3/2\cdot x^2}$ $p(x) = 3x$, $g(x) = x^3$

$\Rightarrow e^{\frac{3}{2}x^2}y' + 3xe^{\frac{3}{2}x^2}y = e^{\frac{3}{2}x^2}\cdot x^3$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\cdot\left[e^{\frac{3}{2}x^2}\cdot y\right] = e^{\frac{3}{2}x^2}x^3$

$\Rightarrow e^{3/2\,x^2}y = \int^x e^{\frac{3}{2}t^2}\cdot t^3\,dt + c$

$\int^{x} e^{3/2 t^2} t^3 \, dt = ?$ $\quad u = \frac{t^2}{2} \Rightarrow du = t\,dt$

$$= \int e^{3u} 2u \, du \qquad \left(\int u\,dv = uv - \int v\,du \text{ 'dan}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} u e^{3u} - \frac{1}{9} e^{3u}\right) = \frac{\cancel{2}}{3} \frac{x^2}{\cancel{2}} e^{\frac{3}{2}x^2} - \frac{2}{9} e^{\frac{3}{2}x^2} + c$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{2}{9}\right) + c e^{-\frac{3}{2}x^2} \quad //$$

Örnek // $y' + \boxed{\frac{3}{x}}\, y = \boxed{x^3}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz. $x > 0$

$$y' + P(x) y = g(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int^{x} \frac{3}{t} dt} = e^{3 \ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

$$y = \frac{1}{x^3}\left[\int^{x} t^3 t^3 \, dt + c\right] = \frac{1}{x^3} \frac{x^7}{7} + c = \frac{x^4}{7} + c x^{-3}$$

$$y(1) = \frac{1}{7} \Rightarrow y(x_0) = y_0$$

$$y_0 = \frac{x_0^4}{7} + c x_0^{-3} \Rightarrow \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + c \Rightarrow c = 0 \qquad y = \frac{x^4}{7} \; //$$

Örnek // $y' + p(x) y = g(x)$ denklemini gözönüne alalım.

a) Eğer $g(x) = 0$ ise gösteriniz ki, yukarıdaki denklemin çözümü,

$y = A e^{-\int^{x} p(t) dt}$ olsun, $\quad$ (A : sabit)

$$g(x) = 0 \Rightarrow y' + p(x) y = 0$$

$$\mu(x) y' + \mu(x) P(x) y = 0 \Rightarrow \mu(x) = e^{\int^{x} p(t) dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\mu(x) y\right] = 0 \Rightarrow \mu(x) y = c \Rightarrow y = \frac{c}{e^{\int^{x} p(t) dt}}$$

$$\Rightarrow y = c \cdot e^{-\int^{x} p(t) dt}$$

b) Eğer $g(x) \neq 0$ ise kabul edelim ki, verilen denklemin çözümü

$y = A(x) e^{-\int^{x} p(t) dt}$ ----(2) $\quad$ formundadır.

$y' + p(x) y = g(x)$ ----(1)

(2) 'yi, (1) de yerine koyarak gösteriniz ki,

$A'(x) = g(x) e^{\int^{x} p(t) dt}$ olmalıdır.

Çözüm // $y' = A'(x) e^{-\int^{x} p(t) dt} - A(x) P(x) e^{-\int^{x} p(t) dt}$

$$\Rightarrow y' + p(x) y = A(x) e^{-\int^{x} p(t) dt} - A(x) P(x) e^{-\int^{x} p(t) dt} + p(x) A(x) e^{-\int^{x} p(t) dt} = g(x)$$

$$\Rightarrow A'(x) = g(x)\, e^{\int^x p(t)dt} \text{ -----(3)}$$

(3) deki $A(x)$ çözülür ve (2) de yerine konursa çözüm elde edilir.

Buna parametrelerin değişme metodu denir.

c) $y'-2y = x^2e^{2x}$ denklemini yukarıdaki metodu kullanarak çözünüz.

$$\Rightarrow A'(x) = x^2e^{2x}e^{-\int^x 2dt}$$

$$= x^2e^{2x}e^{-2x} = x^2$$

$$A'(x) = x^2 \Rightarrow A(x) = \frac{x^3}{3}+c \Rightarrow y = \left(\frac{x^3}{3}+c\right)e^{2x}$$

d) $y'+\frac{1}{x}y = 3\cos 2x$, $x>0$ (ödev)

Bernoulli Diferansiyel Denklemi

$$y' + P(x)y = g(x)y^{(n)}$$

tipindeki denklemlere Bernoulli diferansiyel denklemi denir. Bazı lineer olmayan diferansiyel denklemler vardır ki, bağımlı değişkenin uygun surette değiştirilmesiyle lineer denkleme dönüşürler ve yukarıda belirttiğimiz Bernoulli diferansiyel denklemi bu tip denklemlere uygun en güzel örnektir. $y'+P(x)y = g(x)y^{(n)}$ denkleminde,

$n=0$ ise denklem, $y'+p(x)y = g(x)$ lineerdir.

$n=1$ ise denklem $y'+(p(x)-g(x))y=0$ lineerdir.

$n\neq 0,1$ ise denklem,

$$z = y^{1-n} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-n)}y^n\frac{dz}{dx}$$

$\Rightarrow \frac{1}{(1-n)}y^n\frac{dz}{dx} + p(x)y = g(x)y^{(n)}$ olur. ($\frac{(1-n)}{y^{(n)}}$ ile çarparsak)

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = g(x)^{(1-n)}$ olur, ki bu da bildiğimiz lineer diferansiyel denklemdir. Bir önceki kesimde gördüğümüz teknikle kolayca çözülür.

Örnek // $y' - \frac{3}{x}y = x^3y^4$, $x>0$ denklemini çözünüz.

$$z = y^{1-4} = y^{-3} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}y^4\frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}y^4\frac{dz}{dx} - \frac{3}{x}y = x^3y^4 \Rightarrow \frac{dz}{dx} - \frac{6}{x}z = x^3$$

$$\Rightarrow z = x^{-6}\left(\int^x t^6t^3dt + c\right)$$

$$z=\frac{x^4}{10}+cx^{-6} \Rightarrow \frac{1}{y^3}=\frac{x^4}{10}+cx^{-6} \Rightarrow y^3=\frac{1}{\frac{x^4}{10}+cx^{-6}}$$

$$y(1)=4 \quad 4=\frac{1}{\frac{1}{10}+c} \Rightarrow c=\frac{3}{20}$$

$$y^3=\frac{1}{\frac{x^4}{10}+\frac{3}{20}x^{-6}} \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x^4}{10}+\frac{3}{20}x^{-6}}} \quad //$$

Örnek// $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy-x^3y^3}$ bernoulli diferansiyel denklemini çözünüz.

$$\frac{dx}{dy}=xy-x^3y^3 \Rightarrow \frac{dx}{dy}-xy=-x^3y^3$$

$$x'+P_1(y).x=g_1(y)x^{(n)} \qquad P_1(y)=-x \quad g_1(y)=-x^3 \quad n=3$$

Değişkenlere Ayrılabilen Diferansiyel Denklemler

$$m(x,y)+N(x,y)y'=0 \;\text{- - - -}\; (1)$$

$$y'=f(x,y) \Rightarrow y'-f(x,y)=0$$

$$\Rightarrow m(x,y)=-f(x,y)$$

$\Rightarrow N(x,y)=1$ ve M ve N sürekli fonksiyonlar.

Eğer (1) denkleminde $m(x,y)$ sadece x'in fonksiyonu ise ve $N(x,y)$ de sadece y'nin fonksiyonu ise bu tür denklemlere, değişkenlere ayrılabilen diferansiyel denklemler denir.

$$m(x,y)+N(x,y)y'=0 \;\text{- - - - -}\; (1)$$

$$M(x)+N(y)y'=0 \;\text{- - - -}\; (2)$$

$$H_1'(x)=m(x) \;,\; H_2'(y)=N(y)$$

$$\frac{d}{dx}H_1(x)+\frac{d}{dy}H_2(y)=0 \qquad (H_1'(x)+H_2'(y)=0)$$

- $y^2=x^3 \;,\; y^2-x^3=0 \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx}-3x^2\frac{dx}{dx} \Rightarrow 2yy'-3x^2=0$

1. Örnek// $\text{Arctan}x+(1+x^2)\tan y.y'=0 \qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\text{Arctan}x}{1+x^2}+\tan y\, y'=0$$

$$\Rightarrow m(x)=\frac{\text{Arctan}x}{1+x^2}=[\;?\;]$$

$$\Rightarrow [\ ?\ ] = \int \frac{\text{Arctan}x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\text{Arctan}x)^2$$

$$\Rightarrow [\ ?\ ] = \int \tan y\,dy = -\ln\cos y = N(y)$$

$$H_1(x) = \frac{1}{2}(\text{Arctan}\,x)^2 \ , \quad H_2(y) = -\ln\cos y$$

$$H_1'(x) + H_2'(y) = c \Rightarrow \frac{1}{2}(\text{Arctan}x)^2 - \ln\cos y = c \ //$$

2.örnek// $\frac{dy}{dx} = \frac{x-2y}{2y-x}$ ifadesi değişkenlere ayrılamaz. Gösteriniz.

Eğer $y = x.v$ bağımlı değişken dönüşümü yapılabilirse değişkenlerine ayrılabilir.

$$(2y-x)dy - (x-2y)dx = 0$$

$$y = x.v \Rightarrow dy = x\,dv + v\,dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x-2xv}{2xv-x} = \frac{1-2v}{2v-1}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-2v}{2v-1} - v = \frac{1-2v-2v^2+v}{2v-1} = \frac{-2v^2-v+1}{2v-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2v-1}{-2v^2-v+1}.dv \ //$$

Tam Diferansiyel Denklemler

$$G(x,y) = c \ ,$$

$$dG(x,y) = \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial x}dx = 0 \quad ---- (2)$$

$$m(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

$\frac{\partial G}{\partial y} = G_y = m(x,y)$ (y'ye göre kısmi türev alınırsa x'ler gözükmez.)

$\frac{\partial G}{\partial x} = G_x = N(x,y)$ (x'e göre kısmi türev alınırsa y'ler gözükmez.)

$$\Rightarrow G_{yx} = N_x(x,y) = G(x,y) = m_y(x,y)$$

$$N_x(x,y) = m_y(x,y)$$

★ $G(x,y) = \int^x m(t,y)\,dt + h(y)$

★ $G_y(x,y) = \int^x m_y(t,y)\,dt + h'(y) = N(x,y)$

$$h'(y) = N(x,y) - \int^{x} M_y(t,y)\,dt$$

$$h(y) = \int^{y} N(x,s)\,ds - \int^{y}\int^{x} M_y(t,s)\,dt\,ds$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} G_x &= M(x,y) \\ G_y &= N(x,y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow G_{xy} = G_{yx}$$

$$G(x,y) = c,$$

☆ $$G(x,y) = \int^{y} N(x,t)\,dt + h(x)$$

☆ $$G_x(x,y) = \int^{y} N_x(x,t)\,dt + h'(x) = m(x,y)$$

$$h'(x) = m(x,y) - \int^{y} N_x(x,t)\,dt$$

$$h(x) = \int^{x} m(t,y)\,dt - \int^{x}\int^{y} N_x(x,t)\,dt\,ds$$

$$G(x,y) = \int^{y} N(x,t)\,dt + \int^{x} m(s,y)\,ds - \int^{x}\int^{y} N_x(x,t)\,dt\,ds \quad ----(2)$$

$$G(x,y) = \int^{x} m(t,y)\,dt + \int^{y} N(x,s)\,ds - \int^{y}\int^{x} m_y(t,s)\,dt\,ds \quad ----(3)$$

Eğer $m_y = N_x$ ise verilen denklem tam diferansiyel denklemdir.

Örnek// $(\underbrace{y\cos x + 2xe^{y}}_{m(x,y)}) + (\underbrace{\sin x + x^2e^{y} - 1}_{N(x,y)})y' = 0$ denklemini çözünüz.

$$\left.\begin{aligned} m_y &= \frac{dM(x,y)}{dy} = \cos x + 2xe^{y} \\ N_x &= \frac{dN(x,y)}{dx} = \cos x + 2xe^{y} \end{aligned}\right\} m_y = N_x \text{ tam diferansiyel denklemdir.}$$

$$G(x,y) = \int^{y} N(x,t)\,dt + h(x)$$

$$= \int^{y} (\sin x + x^2e^{t} - 1)\,dt + h(x)$$

$$G_x(x,y) = y\cos x + 2xe^{y} + h'(x) = m(x,y) = y\cos x + 2xe^{y}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = c$$

$$G(x,y) = y\sin x + x^2e^{y} - y + c$$

Örnek// $(\underbrace{3x^2 - 2xy + 2}_{m(x,y)})dx + (\underbrace{6y^2 - x^2 + 3}_{N(x,y)})dy = 0$ denklemini çözünüz.

$$\frac{dm}{dy} = -2x \qquad \frac{dN}{dx} = -2x$$

$m_y = N_x$ o halde denklem, tam diferansiyel denklemdir.

örnek // $\sin y = x^3$ denkleminin tam diferansiyelini alınız. 701

$$\Rightarrow \cos y y' = 3x^2 \Rightarrow \cos y \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\Rightarrow \cos y\, dy = 3x^2 dx$$

$$G(x,y) = c \Rightarrow dG(x,y) = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy$$

$$G(x,y) = \sin y - x^3$$

$$dG(x,y) = -3x^2 dx + \cos y\, dy \qquad (\sin y = x^3 \Rightarrow y = \text{Arcsin}\, x^3)$$

örnek // $G(x,y) = x\sin y - y\cos x$ tam diferansiyelini alınız.

$\Rightarrow$ $dG(x,y) =$ x'e göre türev − y'ye göre türev

$$\Rightarrow dG(x,y) = (\sin y + y\sin x)dx - (x\cos y - \cos x)dy = 0 \quad ?$$

$dG(x,y)$ verildiğinde, $G(x,y)$ nasıl bulunur ?

Tersten gidersek ;

$$\left.\begin{aligned} M_y &= \cos y + \sin x \\ N_x &= \cos y + \sin x \end{aligned}\right\} \text{denklem tam diferansiyel haline gelir.}$$

$$\Rightarrow G(x,y) = \int^{x} (\sin y + y\sin t)dt + h(y)$$

$$= x\sin y - y\cos x + h(y)$$

$$G_y(x,y) = x\cos y - \cos x + h'(y) = x\cos y - \cos x$$

$$\Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c$$

$$\Rightarrow G(x,y) = x\sin y - y\cos x + c \;//$$

integral Çarpanı

Bu bölümde, bazı tam olmayan diferansiyel denklemleri, bazı özel fonksiyonlar ile çarparak tam diferansiyel denklem haline geldiğini göstereceğiz.

$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ denkleminde eğer $M_y \neq N_x$ ise bu denklem tam diferansiyel denklem değildir. Bu durumda,

$$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y' = 0$$

$(\mu(x,y)M(x,y))_y = (\mu(x,y)N(x,y))_x$ olur. Açıkça ifade edilirse ;

$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$ ...... (1) olur.

1°) μ sadece x'in fonksiyonu olsun. $(M+Ny'=0,\ M_y \neq N_x$ ise$)$

$$\mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$$

$$\Rightarrow \mu_x = \left(\frac{M_y - N_x}{N}\right)\mu \quad \Rightarrow \frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{M_y-N_x}{N}\right)\mu$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \left(\frac{M_y-N_x}{N}\right)dx$$ buradan μ bulunur.

- $y'+P(x)y=g(x)$ denklemi verilsin,

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + P(x)y - g(x) = 0 \quad \Rightarrow \underbrace{1.dy}_{N(x,y)} + (\underbrace{P(x)y-g(x)}_{M(x,y)})dx = 0$$

$M_y = P(x) \quad N_x = 0$ olur. Buradan her iki tarafı μ ile çarparsak,

$$\Rightarrow \mu\, dy + \mu(P(x)y - g(x))dx = 0$$

$$\Rightarrow \mu_x = \mu P(x) \quad \Rightarrow \frac{d\mu}{dx} = \mu P(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx \quad \Rightarrow \ln\mu = \int^x P(t)dt$$

$$\Rightarrow \mu = e^{\int^x P(t)dt}$$ olur. Bu da integral çarpanıdır.

Örnek// $(3xy+y^2)+(x^2+xy)\dfrac{dy}{dx}=0$ tam diferansiyel denklem midir?

$$\left.\begin{array}{l} M_y = 3x+2y \\ N_x = 2x+y \end{array}\right\}$$ tam diferansiyel denklem olmaz.

(Tam dif. haline getirmek için μ bulmalıyız.)

$$\frac{M_y-N_x}{N} = \frac{3x+2y-2x-y}{x^2+xy} = \frac{x+y}{x(x+y)} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \ln\mu = \ln x \quad \Rightarrow \mu = x.$$

Denklemi x ile çarparsak,

$$\Rightarrow x(3xy+y^2) + x(x^2+xy)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow (\underbrace{3x^2y+xy^2}_{M(x,y)}) + (\underbrace{x^3+x^2y}_{N(x,y)})\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (M+Ny'=0)$$

$$\left.\begin{array}{l} M_y = 3x^2+2xy \\ N_x = 3x^2+2xy \end{array}\right\}$$ O halde denklem tam dif. denklem haline gelir.

$$G(x,y) = \int^x (3t^2y + ty^2)dt + h(y)$$

$$= x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + h(y)$$

$\mu_y M + \mu M_y = \mu N_x$ ---- (2)

$$\mu_y = \left(\frac{N_x - M_y}{M}\right)\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{dy} = \left(\frac{N_x - M_y}{M}\right)\mu$$

$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \left(\frac{N_x - M_y}{M}\right)dy$ buradan μ bulunur //

- $\mu(x,y) = y^2 + 2y$ olsun

$\mu_y = 2y + 2 \Rightarrow \frac{d\mu}{\partial y} = 2y + 2$

$d\mu = (2y+2)dy \Rightarrow \frac{d\mu}{dy} = 2y + 2$

1. **Örnek** // $dx + \left(\frac{x}{y} - \sin y\right)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$M_y = 0 \quad N_x = \frac{1}{y} \Rightarrow M_y \neq N_x$ tam dif. denk. değil.

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{\frac{1}{y} - 0}{1} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \left(\frac{N_x - M_y}{M}\right)dy \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{y}dy$$

$$\Rightarrow \ln\mu = \ln y \Rightarrow \mu = y$$

Denklemi $\mu = y$ ile çarpalım.

$\Rightarrow \underbrace{y\,dx}_{M(x,y)} + (\underbrace{x - y\sin y}_{N(x,y)})dy = 0$ olur.

$M_y = 1$
$N_x = 1$ O halde tam dif. denklemdir.

$G(x,y) = \int^x y\,dt + h(y) = xy + h(y)$

$G_x(x,y) = \frac{\partial G}{\partial x} = x + h'(y) = x - y\sin y$

$h'(y) = -y\sin y \Rightarrow h(y) = -(-y\cos y + \sin y) = y\cos y - \sin y$

$G(x,y) = xy + y\cos y - \sin y + c$ //

2. **Örnek** // $e^x dx + (e^x \cot y + 2y\,\mathrm{cosec}\,y)\,dy = 0$ integral çarpanını bulup, denklemi çözünüz.

$$\left.\begin{aligned} M_y &= e^x \\ N_x &= e^x \cot y \end{aligned}\right\} M_y \neq N_x$$

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{e^x \cot y - 0}{e^x} = \cot y$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \cot y \, dy \Rightarrow \ln \mu = \ln \sin y$$

$\Rightarrow \mu = \sin y$ denklemi $\sin y$ ile çarpalım.

$$\Rightarrow \sin y \, e^x dx + \sin y (e^x \cot y + 2y \operatorname{cosec} y) dy = 0$$

$$\Rightarrow \sin y \, e^x dx + \sin y \left(e^x \frac{\cos y}{\sin y} + 2y \frac{1}{\sin y}\right) dy = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin y \, e^x}_{M(x,y)} dx + (\underbrace{e^x \cos y + 2y}_{N(x,y)}) dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} M_y = \cos y \, e^x \\ N_x = e^x \cos y \end{array}\right\} M_y = N_x$$

$$G(x,y) = \int^x \sin y \, e^t dt + h(y)$$

$$= \sin y \, e^x + h(y)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = G_y(x,y) = e^x \cos y + h'(y) = e^x \cos y + 2y$$

$$\Rightarrow h'(y) = 2y \Rightarrow h(y) = y^2 + c$$

$$G(x,y) = e^x \sin y + y^2 + c \quad //$$

3°) Eğer $\frac{N_x - M_y}{xM - yN} = R$ ve R yalnızca xy'ye bağlı ise,

bu taktirde, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ diferansiyel denklemi $\mu(x,y)$ olduğunda bir integral çarpanına sahiptir.

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x \quad \text{---} (1)$$

$xy = t$ olsun. $\Rightarrow \partial t = x \partial y \Rightarrow x = \frac{\partial t}{\partial y}$

$$\mu_y = \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \boxed{\partial_t \cdot x}$$

$$\mu_x = \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \boxed{\partial_t \cdot y}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} xy = t \Rightarrow \frac{\partial t}{\partial x} = ? \\ dt = \underset{\frac{\partial t}{\partial x}}{\boxed{y}} dx + \underset{\frac{\partial t}{\partial y}}{\boxed{x}} dy \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_t x} M + \mu M_y = \boxed{\mu_t y} N + \mu N_x$$

$$\Rightarrow \mu_t (xM - yN) = (N_x - M_y)\mu$$

$$\Rightarrow \mu_t = \left(\frac{N_x - M_y}{xM - yN}\right)\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{dt} = R \cdot \mu \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = R\,dt \Rightarrow \mu = e^{\int^{xy} R\,dt} \quad //$$

Örnek // $\left(3x+\frac{6}{y}\right)+\left(\frac{x^2}{y}+3\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=0$ denkleminin genel çözümü ?

$$\left.\begin{aligned} M_y &= -\frac{6}{y^2} \\ N_x &= \frac{2x}{y}-\frac{3y}{x^2} \end{aligned}\right\} \text{ tam dif. denklem değildir.}$$

$$\frac{N_x-M_y}{xM-yN}=\frac{\frac{2x}{y}-\frac{3y}{x^2}+\frac{6}{y^2}}{x\left(3x+\frac{6}{y}\right)-y\left(\frac{x^2}{y}+\frac{3y}{x}\right)}=\frac{1}{xy}=R$$

$\mu=e^{\int^{xy}R\,dt}$ $\quad xy=t$ dersek,

$\mu=e^{\int^{xy}\frac{1}{t}dt}=e^{\ln xy}=xy$, denklemi xy ile çarpalım.

$$\Rightarrow xy\left(3x+\frac{6}{y}\right)+xy\left(\frac{x^2}{y}+3\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(3x^2y+6x)}_{M(x,y)}+\underbrace{(x^3+3y^2)}_{N(x,y)}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\left.\begin{aligned} M_y &= 3x^2 \\ N_x &= 3x^2 \end{aligned}\right\} \text{ tam dif. denklemdir. } M_y=N_x$$

$$G(x,y)=\int^x M(t,y)\,dt+h(y)$$

$$=\int^x(3t^2y+6t)\,dt+h(y)$$

$$=3\frac{x^3}{3}y+6\frac{x^2}{2}+h(y)$$

$$G(x,y)=x^3y+3x^2+h(y)$$

$$G_y(x,y)=\frac{\partial G}{\partial y}=\int^x M_y(t,y)\,dt+h'(y)=N(x,y)$$

$$=\int^x 3t^2\,dt+h'(y)=x^3+3y^2$$

$$=x^3+h'(y)=x^3+3y^2$$

$$\Rightarrow h'(y)=3y^2 \Rightarrow h(y)=y^3+c$$

$$\Rightarrow G(x,y)=x^3y+3x^2+y^3+c \quad //$$

Homojen Denklemler

Daha önceki iki bölümün aksine, bu bölümde bazı denklemleri değişken dönüşümü tekniğiyle çözmeye çalışacağız.

$y'=\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ denklemine homojendir denir.

Eğer f, x ve y 'nin ayrı ayrı fonksiyonu değil fakat, $\frac{x}{y}$ veya $\frac{y}{x}$ in fonksiyonu ise denkleme homojen denklem denir.

O halde denklem, $\frac{dy}{dx} = F(\frac{y}{x})$ formundadır.

- $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}$ homojendir.
- $\frac{dy}{dx} = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y} = \ln\frac{x}{y} + \frac{x(1+\frac{y}{x})}{x(1-\frac{y}{x})} = \ln\frac{1}{y/x} + \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$ homojendir.
- $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3+2xy}{x^2} = \boxed{y}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}$ (homojen değil)

Verilen denklemin homojen olması için x veya y, çarpan olmamalıdır.

- $\frac{dy}{dx} = \sin\frac{y}{x} - \log\frac{y}{x}$ homojendir.

$\frac{y}{x} = v$ değişken dönüşümü yapılırsa, $\left(F(v) = F(\frac{y}{x})\right)$

$y = x.v \Rightarrow dy = x\,dv + v\,dx$ (dx'e bölersek)

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$ (denklemde yerine yazarsak)

$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = F(v) \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = F(v) - v$

$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{F(v)-v}$ olur. Bu da değişkenlere ayrılabilen bir diferansiyel denklemdir. Çözümü kolayca yapılır.

Riccati Diferansiyel Denklemi

Bazı diferansiyel denklemler basit dönüşümlerle lineer denklemlere indirgenebilmektedir. Riccati diferansiyel denklemi de bunların en önemlilerindendir. Genel şekli ;

$$\frac{dy}{dx} = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2 + \ldots \qquad \text{----}(1)$$

olan diferansiyel denklemine, Riccati diferansiyel denklemi denir.

$q_3(x)$ özdeş olarak sıfır olursa, (1) denklemi lineer denkleme,

$q_1(x)$ özdeş olarak sıfır olursa, Bernoulli denklemine indirgenir.

Bu iki halin dışında (1) denkleminin genel çözümünün bulunması oldukça zordur. Çözümün yapılabilmesi için bir yardımcı fonksiyon gerekir. Bu yardımcı fonksiyon (1) yardımcı denkleminin, ya soru ile birlikte ya da bizim bulacağımız bir özel çözümüdür.

Böyle bir çözüm, $y_1(x)$ ise bağımlı değişkeni,

$$y(x)=y_1(x)+\frac{1}{v(x)} \quad ---- (2)$$

ile değiştiririz. Türevi alırsak,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx}-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$ (1) de yerine yazarsak

$$\Rightarrow \frac{dy_1}{dx}-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}=q_1+q_2\left(y_1+\frac{1}{v}\right)+q_3\left(y_1+\frac{1}{v}\right)^2$$

$$\Rightarrow \qquad =q_1+q_2y_1+\frac{q_2}{v}+q_3y_1^2+\frac{2q_3y_1}{v}+\frac{q_3}{v^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dy_1}{dx}-q_1-q_2y_1-q_3y_1^2}_{=0}-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}=\frac{q_2}{v}+\frac{2q_3y_1}{v}+\frac{q_3}{v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy_1}{dx}=q_1+q_2y_1+q_3y_1^2$$ yazabiliriz.

$$\Rightarrow 0-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}=\frac{q_2}{v}+\frac{2q_3}{v}+\frac{q_3}{v^2}$$ $(-v^2)$ ile çarpalım.

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx}=-q_2v-2q_3y_1v-q_3$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx}+v(q_2+2q_3y_1)=-q_3 \quad ---- (3)$$

olur. Bu da $y'+P(x)y=g(x)$ şeklindeki lineer denklemdir.

Yani (2) dönüşümü; (1) denklemini, (3) lineer denklemine indirger.

Örnek 1,, $\frac{dy}{dx}=1+x^2-2xy+y^2$ Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. (Yardımcı fonksiyonu $y_1(x)=x$ alınız.)

$$y(x)=y_1(x)+\frac{1}{v(x)} \Rightarrow y(x)=x+\frac{1}{v(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$ denklemde yazarsak,

$$\Rightarrow \cancel{1} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \cancel{1} + x^2 - 2x\left(x+\frac{1}{v}\right) + \left(x+\frac{1}{v}\right)^2$$

$$= \cancel{x^2} - 2x^2 - \cancel{\frac{2x}{v}} + \cancel{x^2} + \cancel{\frac{2x}{v}} + \frac{1}{v^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v^2} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -1 \Rightarrow v(x) = -x + c$$

$$y(x) = x + \frac{1}{v(x)} \Rightarrow y(x) = x + \frac{1}{-x+c} \quad //$$ genel çözümdür.

Örnek 2// $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$ Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümünü, özel çözümü $y_1 = \frac{1}{x}$ alarak bulunuz.

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{v(x)} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{v(x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow -\cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -\cancel{\frac{1}{x^2}} - \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{v}\right)\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{v}\right)^2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -\cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{xv} + \cancel{\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{xv} + \frac{1}{v^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{xv} + \frac{1}{v^2}$$ ($-v^2$ ile çarpalım)

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = -1$$ lineer denklem şeklini alır.

$$\left(y' + p(x)y = g(x) \ , \quad \mu(x) = e^{\int^x p(t)dt} \right)$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int^x \frac{1}{t}dt} = e^{\ln x} = x$$ (her iki tarafı $\mu = x$ ile çarpalım)

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} + x\frac{v}{x} = -1.x \Rightarrow x\frac{dv}{dx} + v = -x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[x.v\right] = -x$$

$$\Rightarrow x \cdot v(x) = -\frac{x^2}{2} + k$$

$$\Rightarrow v = -\frac{x^2}{2x} + \frac{k}{x} = -\frac{x}{2} + \frac{k}{x} \qquad y(x) = y_1 + \frac{1}{v}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{-\frac{x}{2} + \frac{k}{x}} \quad //$$ genel çözümdür.

Örnek 3 // $\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x}$ Riccati denkleminin genel çözümünü, $y_1 = \sin x$ özel çözümünü kullanarak bulunuz.

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{v(x)} \Rightarrow y(x) = \sin x + \frac{1}{v(x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \cancel{\cos x} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \cancel{\cos x} - \frac{\sin^2 x}{2\cos x} + \frac{(\sin x + \frac{1}{v})^2}{2\cos x}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \cancel{-\frac{\sin^2 x}{2\cos x}} + \frac{\frac{2\sin x}{v}}{2\cos x} + \cancel{\frac{\sin^2 x}{2\cos x}} + \frac{1}{2v^2\cos x}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{\tan x}{v} + \frac{1}{2v^2}\sec x$$ ($-v^2$ ile çarpalım)

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -v\tan x - \frac{1}{2}\sec x$$ $(y' + p(x)y = g(x))$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} + v\tan x = -\frac{1}{2}\sec x$$ olur. lineer denklemdir.

$$\mu(x) = e^{\int \tan x\, dx} = e^{\ln \sec x} = \sec x$$ denklemi $\mu = \sec x$ ile çarpalım

$$\Rightarrow \sec x \frac{dv}{dx} + v\tan x \sec x = -\frac{1}{2}\sec^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\sec x . v\right] = -\frac{1}{2}\sec^2 x$$

$$\Rightarrow \quad \sec x . v = -\frac{1}{2}\int \sec^2 x\, dx \Rightarrow \sec x . v = -\frac{1}{2}(\tan x + c_1)$$

$$\Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2}\left(\frac{\tan x + c_1}{\sec x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \sin x + \frac{1}{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tan x + c_1}{\sec x}\right)}$$ // genel çözümdür.

Alıştırmalar

1− a) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x - y}{y - 3x}$ denklemini çözünüz.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x(3 - \frac{y}{x})}{x(\frac{y}{x} - 3)} = \frac{3 - \frac{y}{x}}{\frac{y}{x} - 3}$$ homojen diferansiyel denklemdir.

$\frac{y}{x} = v$ dönüşümüyle, $y = v.x \Rightarrow dy = v dx + x dv$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$ olur.

$$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3-v}{v-3} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{3-v}{v-3} - v \quad \left(\text{veya } x\frac{dv}{dx} = -1-v\right)$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{3-v+v^2+3v}{v-3}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2+2v+3}{v-3}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{v-3}{v^2+2v+3}\,dv$$

$$\Rightarrow \ln x + c = \int\frac{v-3}{v^2+2v+3}\,dv \quad //$$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x-y}{3y-x} = \frac{x(3-\frac{y}{x})}{x(3\frac{y}{x}-1)} = \frac{3-\frac{y}{x}}{3\frac{y}{x}-1}$ homojen dif. denklemdir.

$\frac{y}{x} = v \Rightarrow y = x.v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3-v}{3v-1} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{3-v}{3v-1} - v$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{3-v-3v^2+v}{3v-1}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{3-3v^2}{3v-1}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{3v-1}{3-3v^2}\,dv$$

$$\Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2}\ln(3-3v^2) + \frac{1}{6}\ln(v-1) - \frac{1}{6}\ln(v+1) - \ln c$$

$$\Rightarrow \ln cx = \ln(3-3v^2)^{-1/2} + \ln(v-1)^{1/6} + \ln(v+1)^{-1/6}$$

$$\Rightarrow \ln cx = \ln(3-3v^2)^{-1/2}(v-1)^{1/6}(v+1)^{-1/6}$$

$$\Rightarrow cx = \frac{(v-1)^{1/6}}{(3-3v^2)^{1/2}(v+1)^{1/6}} = \frac{(y/x-1)^{1/6}}{(3-3\frac{y}{x})^{1/2}(y/x+1)^{1/6}} \quad //$$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x-y+5}{3y-x-3}$ denklemini çözünüz.

★★ $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ denkleminde $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ ise denklem çözülebilir.

x ve y'nin kuvveti birinci derecedendir. Ve homojen diferansiyel denklemlere dönüştürülen diferansiyel denklemlerdir.

$x = X - k$ ve $y = Y - l$ olsunlar. $(k, l$ sabitler$)$

$$\Rightarrow dx = dX - 0 \quad , \quad dy = dY - 0 \qquad \frac{dy}{dX} = \frac{dY}{dX}$$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{3(X-k)-3(Y-l)+5}{3(Y-l)-(X-k)-3} = \frac{3X-3k-3Y+3l+5}{3Y-3l-X+k-3}$$

sabitler toplamını sıfıra eşitlemeliyiz.

$$3/ \quad -3k+3l+5 = 0$$
$$-3l+k-3 = 0$$
$$\overline{\quad -8k = -12 \Rightarrow k = \frac{3}{2} \;,\; l = -\frac{1}{2}}$$

$$cX = \frac{\left(\frac{Y}{X}-1\right)^{1/6}}{\left(3-3\left(\frac{Y}{X}\right)^2\right)^{1/2}\left(\frac{Y}{X}+1\right)^{1/6}} \qquad \begin{array}{l} Y = y+l = y-\frac{1}{2} \\ X = x+k = x+\frac{3}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow c\left(x+\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(\frac{y-\frac{1}{2}}{x+3/2}\right)^{1/6}}{\left(3-3\left(\frac{y-1/2}{x+3/2}\right)^2\right)^{1/2}\left(\frac{y-1/2}{x+3/2}+1\right)^{1/6}} \quad //$$

2- a) Eğer $m(x,y)+N(x,y)y' = 0$ denklemi homojen ise gösteriniz ki,

$\frac{1}{xM+yN} = \mu(x,y)$ verilen denklem için bir integral çarpanıdır.

$$\frac{M}{xM+yN} + \frac{N}{xM+yN}\,y' = 0 \quad \text{(tam dif. denklem ise)}$$

$\left(\frac{M}{xM+yN}\right)_y = \left(\frac{N}{xM+yN}\right)_x$ olmalı. Kısmî diferansiyelini alalım.

$$\Rightarrow \frac{M_y(xM+yN)-(xM_y+N+yN_y)M}{(xM+yN)^2} = \frac{N_x(xM+yN)^2-(M+xM_x+yN_x)N}{(xM+yN)^2}$$

$$\Rightarrow yNM_y - NM - yMN_y = xMN_x - MN - xNM_x$$

$$\Rightarrow N(yM_y + xM_x) - M(yN_y + xN_x) = 0$$

homojen fonksiyonlar için Euler teoreminden,

$$\Rightarrow yM_y + xM_x = nM \quad , \quad yN_y + xN_x = nN$$

$$\Rightarrow NnM - MnN = 0$$

O halde $\mu(x,y)$ denklemin integral çarpanıdır.

Teorem : (Homojen Fonksiyonlar İçin EULER Teoremi) :

Bir f(X) fonksiyonuna homojendir denir. Eğer,

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{n} f(x,y) \qquad (\lambda>0)$$

oluyorsa. Her iki tarafın λ'ya göre türevini alalım.

$$u=\lambda x \quad v=\lambda y \Rightarrow f(u,v),$$

$$(f(u,v))' = f_u . u_\lambda + f_v . v_\lambda$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} x + \frac{\partial f}{\partial v} y = \boxed{n\lambda^{n-1} f(x,y)} \; (\lambda\text{'ya göre türev})$$

$$= x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y = n f(x,y)$$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x-y}{3y-x}$ denklemini integral çarpanı metoduyla çözelim.

$$\Rightarrow (3x-y)dx-(3y-x)dy=0$$

$$\left.\begin{array}{l} M_y=-1 \\ N_x=1 \end{array}\right\} M_y \neq N_x$$

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xM+yN}=\frac{1}{x(3x-y)-y(3y-x)}=\frac{1}{3x^2-3y^2}=\frac{1}{3(x^2-y^2)}$$

denklemde her iki tarafı μ ile çarpalım.

$$\Rightarrow \left(\frac{3x-y}{3(x^2-y^2)}\right)dx-\left(\frac{(3y-x)}{3(x^2-y^2)}\right)dy=0$$

$$G(x,y)=\int\frac{3x-y}{3(x^2-y^2)}dx+h(y)=\frac{1}{2}\ln(x^2-y^2)+\frac{1}{6}\ln(x-y)-\frac{1}{6}\ln(x+y)+h(y)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}=G_y(x,y)=-\frac{y}{(x^2-y^2)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-y}-\frac{1}{6}\frac{1}{x+y}+h'(y)=-\frac{y}{x^2-y^2}+\frac{x}{x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow h'(y)=0 \Rightarrow h(y)=c$$

$$G(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2-y^2)+\frac{1}{6}\ln(x-y)-\frac{1}{6}\ln(x+y)+c \quad //$$

3 − Eğer, $M+Ny'=0$ denklemi, $(f(xy)\neq g(xy))$

$y\,f(xy)\,dx+x\,g(xy)\,dy=0$ şeklinde yazılabilirse, gösteriniz ki,

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xM-yN}=\frac{1}{xy.\{f(xy)-g(xy)\}}$$ bir integral çarpanıdır.

$$\frac{f\,dx}{x\{f-g\}} + \frac{g\,dy}{y\{f-g\}} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{x\{f-g\}}\right)_y = \left(\frac{g}{y\{f-g\}}\right)_x$$ kısmî diferansiyelini alalım.

$$\Rightarrow \frac{f_y x\{f-g\} - x\{f_y-g_y\}f}{(x\{f-g\})^2} = \frac{g_x y\{f-g\} - y\{f_x-g_x\}g}{(y\{f-g\})^2}$$

$$\Rightarrow xy^2 f_y\{f-g\} - xy^2\{f_y-g_y\} = x^2y\, g_x\{f-g\} - x^2y\{f_x-g_x\}g$$

$xy = t$ dersek $\Rightarrow (f(t))_y = f_t \cdot x$

$$\Rightarrow xy^2 f_t\{f-g\} - x^2y^2\{f_t-g_t\}f = x^2y^2 g_t\{f-g\} - x^2y^2\{f_t-g\}g$$

eşitliği doğru olur.

Örnek// $y(1+xy)dx + x(1+xy-x^2y^2)dy = 0$ kısmî diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xM-yN} = \frac{1}{xy(1+xy)-yx(1+xy-x^2y^2)} = \frac{1}{xy(1+\cancel{xy}-\cancel{1}-\cancel{xy}+x^2y^2)}$$

$\mu(xy) = \dfrac{1}{x^3y^3}$ integral çarpanıdır. $M_y = \dfrac{xy-2}{x^3y^3} = N_x$

$G(x,y) = \int \dfrac{1+xy}{x^3y^2}dx + h(y)$ tam dif denk.

Birinci Mertebe Diferansiyel Denklemlerin Varlık ve Teklik Değerleri

f ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $R: |x| \leq a$, $|y| \leq b$ dikdörtgeninde sürekli olsunlar. Bu taktirde, $|x| \leq h \leq a$ aralığı vardır ki, bu aralıkta,

$$\left.\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(0) = 0 \end{array}\right\} \cdots (1)$$

başlangıç değer teoreminin bir tek sonucu vardır.

$$\left\{\begin{array}{llll} y' = f(x,y), & y(x_0) = y_0 & w = y-y_0 & s = x-x_0 \\ \dfrac{dw}{ds} = f(s+x_0, w+y_0) & w(0) = 0 & & \end{array}\right\}$$

Şimdi geçici olarak kabul edelim ki, $y = \phi(x)$ fonksiyonu var ve bu verilen başlangıç değer teoremini sağlar.

Bu taktirde $f(x,\phi(x))$, x'in sürekli fonksiyonudur. Dolayısıyla (1)'in integrali alınabilir.

$$\phi(x) = \int_0^x f(t,\phi(t))\,dt \quad \text{-----} (2)$$

olur. (2) denklenine integral denklemi adı verilir. Açıkça görüleceği üzere bu eşitlik başlangıç değer teoreminin çözümü için herhangi bir formül vermez. Tersine şimdi kabul edelim ki, (2) denklenini sağlayacak şekilde $y=\phi(x)$ sürekli fonksiyonu varolsun. Bu taktirde, $y=\phi(x)$, (1)'i de sağlar. Çünkü $\phi(0)=0$ dır ve $\phi'(x)=f(x,\phi(x))$ dir. O halde (2) nin çözümü, (1)'in de çözümüdür.

(2) nin bir tek çözüme sahip olduğunu göstermek çeşitli yollardan olasıdır. Bunlardan birisi ise <u>PİCARD</u> ardışık yaklaşımlar metodudur. Bu metodu kullanmak için ϕ_0'ı belirlemek gerekir. Basit olarak,

$$\phi_0(x) = 0 \quad \text{-----} (3)$$

seçelim. Ve devam ederek,

$$\phi_1(x) = \int_0^x f(t,\phi_0(t))dt \quad \text{------} (4)$$

$$\phi_2(x) = \int_0^x f(t,\phi_1(t))dt \quad \text{-----} (5)$$

ve genel olarak,

$$\phi_{n+1}(x) = \int_0^x f(t,\phi_n(t))dt \quad \text{----} (6)$$

bu şekilde devam ederek, $\{\phi_n\} = \phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ fonksiyonlarının dizisini belirlemiş oluruz. Dikkat edelim ki, bu ailenin herbir üyesi başlangıç şartını sağlar. Fakat hiçbiri genel olarak diferansiyel denklemi sağlamaz. Bununla birlikte kabul edelim ki, belli bir yerde genel olarak, $\phi_{k+1}(x) = \phi_k(x)$ bulduk. Bunun anlamı, $\phi_k(x)$, (2) nin çözümüdür ve dolayısıyla (1) in çözümüdür. Halbuki genel olarak böyle bir durumla karşılaşmayız. Bu gibi durumlarda üretilecek sonsuz seriyi düşünmek zorundayız. O halde (2) yi ispat etmek için şu dört temel soruyu cevaplamak zorundayız :

i- $\{\phi_n\}$ dizisinin tüm elemanları var mıdır? Veya işlem belli bir yerde kırılır mı?

ii- Dizi yakınsak mıdır?

iii- Limit fonksiyonunun özellikleri nelerdir. Özellikle (2) yi, dolayısıyla (1)'i sağlar mı?

iv- Çözüm tek midir? veya diğer çözümler var mıdır?

Örnek // $y' = 2x(1+y)$, $y(0)=0$ başlangıç değer probleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm // Eğer problemi picard ardışık yaklaşımlar metoduyla çözmeye çalışırsak, elde edilecek integral denklemimiz,

$$\phi(x) = \int_0^x 2t(1+\phi(t))dt, \quad \phi_0(x)=0 \text{ seçelim.}$$

$$\phi_1(x) = \int_0^x 2t(1+\phi_0(t))dt = \int_0^x 2t\,dt = x^2 \;----\; (7)$$

$$\phi_2(x) = \int_0^x 2t(1+\phi_1(t))dt = \int_0^x 2t(1+t^2) = \int_0^x (2t+2t^3)dt$$

$$= x^2 + \frac{x^4}{2} \;-------\; (8)$$

$$\phi_3(x) = \int_0^x 2t(1+\phi_2(t)dt = \int_0^x 2t\left(1+t^2+\frac{t^4}{2}\right)dt$$

$$= \int_0^x (2t+2t^3+t^5)dt = x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6} \;----\; (9)$$

$$\vdots$$

$$\phi_n(x) = x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\dots+\frac{x^{2n}}{n!} \;----\; (10)$$

Bunu tümevarımla ispatlayabiliriz.

$n=1$ için $\phi_1(x)=x^2$

$n=k$ için eşitlik doğru olsun. $n=k+1$ için ?

$$\phi_{k+1}(x) = x^2+\frac{x^4}{2!}+\dots+\frac{x^{2k}}{k!}+\frac{x^{2k+2}}{(k+1)!}$$

$$= \int_0^x 2t\left(1+t^2+\frac{t^4}{2}+\dots+\frac{t^{2k}}{k!}\right)dt = x^2+\frac{x^4}{2!}+\dots+\frac{x^{2k+2}}{(k+1)!}$$

$n=k+1$ için doğru olduğundan eşitlik doğru olur.

(10) daki seri, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$ serisinin kısmî toplamıdır.

Eğer bu seri yakınsak ise, $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ limiti vardır.

Kabul edelim ki, $\Psi(x)$ fonksiyonu olsun ve bu fonksiyon, integral denklemini sağlasın. O halde,

$$\phi(x)-\Psi(x)=\int_0^x 2t\left(\phi(t)-\Psi(t)\right)dt$$

olur. Kabul edelim ki, $x\geqslant 0$ olsun ve her iki tarafın mutlak değerini alalım.

$$|\phi(x)-\Psi(x)|=\left|\int_0^x 2t\left(\phi(t)-\psi(t)\right)dt\right| \leqslant \int_0^x \left|2t\left(\phi(t)-\psi(t)\right)dt\right|$$

olur. $0\leqslant x\leqslant \frac{A}{2}$, $2t\leqslant A$ olur $\Rightarrow$ $\leqslant A\int_0^x |\phi(t)-\psi(t)|\,dt$

olur. Eğer,

$$U(x)=\int_0^x |\phi(t)-\psi(t)|\,dt$$

dersek, $U(0)=0$ ve $U(x)\geqslant 0$ (*)

olur. Ve $U'(x)=|\phi(t)-\Psi(t)|$ dir.

$$\Rightarrow U'(x)\leqslant A.U(x)$$

$$\Rightarrow U'(x)-A.U(x)=0 \Rightarrow \left(e^{-Ax}U(x)\right)'=0$$

$$\Rightarrow e^{-Ax}U(x)\leqslant 0 \Rightarrow e^{-Ax}\nless 0$$ olur. (küçük olamaz)

O halde, $U(x)\leqslant 0$ (*) olmalıdır. $U(x)=0$ olmalı.

$$U(x)=\int_0^x |\phi(t)-\psi(t)|\,dt=0$$

$$\Rightarrow |\phi(x)-\Psi(x)|=0 \Rightarrow \phi(x)-\Psi(x)=0 \Rightarrow \phi(x)=\Psi(x)$$

olur ki, bu da hipoteze aykırıdır. İspat tamamlanmış olur.

(Dizinin tüm elemanları vardır, yakınsaktır, limiti vardır ve problemin tek çözümü vardır.)

$$y'=2x(1+y)\ ,\quad y(0)=0$$

$$y=\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=2x(1+y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{1+y}=2x\,dx \Rightarrow \ln|1+y|=x^2+c \Rightarrow 1+y=e^{x^2+c} \quad (c=e^k)$$

$$y(0)=0\ ,\quad y=-1+c_1e^{x^2} \Rightarrow y(0)=-1+c_1 \Rightarrow c_1=1$$

$$\Rightarrow y=-1+e^{x^2}$$ //

$a_n = \frac{d^n \phi}{n! dx^n}\Big|_{x=0}$

f ; $n=0$ ise $e^{x^2} = e^0 = 1$

f' ; $n=1$ ise $2xe^{x^2} = 0$ $n \neq 1$ olur.

f'' ; $n=2$ ise $2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} \big|_{x=0}$

$\phi(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots$ denklemi,

$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisinin, taylor serisi şeklinde ifadesidir.

Eğer integraller alınabiliyorsa, verilen bir seriyi analitik fonksiyona çevirmek için, picard ardışık yaklaşımlar metodunu kullanırız.

Örnek // $\underbrace{(\cos 2y - \sin x)}_{M(x,y)} dx - \underbrace{2\tan x \sin 2y}_{N(x,y)} dy = 0$ denklemini çözünüz.

$$\left.\begin{aligned} M_y &= -2\sin 2y \\ N_x &= -2\sec^2 x \sin 2y \end{aligned}\right\} M_y \neq N_x$$

$M_y - N_x = -2\sin 2y + 2\sec^2 x \sin 2y$ $\quad$ y parantezine alındığı için μ sadece x'e bağlıdır.

$= -2\sin 2y(1 - \sec^2 x)$

$\left(\frac{M_y - N_x}{N}\right) dx = \frac{d\mu}{\mu} \Rightarrow \frac{\cancel{-2\sin 2y}(1-\sec^2 x)}{\cancel{-2\sin 2y}\tan x} dx = \frac{d\mu}{\mu}$

$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1-\sec^2 x}{\tan x} dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1-(1+\tan^2 x)}{\tan x} dx$

$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{-\tan^2 x}{\tan x} dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\tan x \, dx$

$\Rightarrow \ln \mu = -(-\ln \cos x) \Rightarrow \ln \mu = \ln \cos x \Rightarrow \mu = \cos x$

$\Rightarrow \cos x(\cos 2y - \sin x) dx - \cos x \, 2 \frac{\sin x}{\cos x} \sin 2y \, dy = 0$

$\Rightarrow \cos x(\cos 2y - \sin x) dx - 2\sin x \sin 2y \, dy = 0$

$G(x,y) = \int^y -2\sin x \sin 2t \, dt + h(x)$

$= -2\sin x \int^y \sin 2t \, dt + h(x)$

$= 2\sin x \frac{1}{2} \cos 2y + h'(x)$

$G_x(x,y) = \sin x \cos 2y + h'(x) = \cos x(\cos 2y - \sin x)$

$\Rightarrow h'(x) = -\cos x \sin x$

$\Rightarrow h(x) = -\frac{1}{2}\sin^2 x + c$

$G(x,y) = \sin x \cos 2y - \frac{1}{2}\sin^2 x + c$ //

Örnek// $x\,dy - y\,dx = (xy)^{1/2}\,dx$ denklemini çözünüz.

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} - y = (xy)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{(xy)^{1/2}}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^{1/2}$$

$\Rightarrow y = u.x \Rightarrow u = \frac{y}{x}$ diyelim.

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ denklemde yerine yazalım.

$$\Rightarrow \cancel{u} + x\frac{du}{dx} = \cancel{u} + u^{1/2} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = u^{1/2}$$

$$\Rightarrow x\,du = dx\,u^{1/2} \Rightarrow \int\frac{du}{u^{1/2}} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow 2u^{1/2} = \ln x + c$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{y}{x}\right)^{1/2} = \ln x + c \quad //$$

Örnek// $(e^x+1)\frac{dy}{dx} = y - ye^x$ denklemini çözünüz.

$$\Rightarrow (e^x+1)\frac{dy}{dx} = y(1-e^x) \Rightarrow \frac{e^x+1}{1-e^x}\frac{dy}{dx} = y$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)dx = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln y = \int\frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx$$

$e^x = u \Rightarrow du = e^x\,dx \Rightarrow \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u} = dx$ olur.

$$\Rightarrow \ln y = \int\frac{1-u}{1+u}\,\frac{du}{u}$$

$$\frac{A}{u} + \frac{B}{1+u} = \frac{(A+B)u + A}{u(1+u)} \qquad A=1 \quad A+B=-1$$

$$\Rightarrow \ln y = \int\left(\frac{1}{u} - \frac{2}{1+u}\right)du + c \qquad B=-2$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln e^x - 2\ln(1+e^x) + c \quad //$$

İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Bu bölümü, $y'' = f(x,y,y')$ ----(1)

denklemini gözönüne alarak başlayalım. Birinci mertebeden diferansiyel denklemler için, ki bunlar; $y' = f(x,y)$ idi, gördük ki bu diferansiyel denklemlerin çözümleri, herhangi bir sabiti kapsar. Halbuki İkinci mertebeden denklemler, ikinci mertebeden türevleri kapsayacağı için, kabaca iki integral işlemine çözüm için ihtiyaç duyulur. Dolayısıyla (1) denkleminin çözümü, herhangi iki sabiti kapsar. Örneğin,

$y'' = g(x)$ denkleminin çözümü,

$$y = ax+b + \int^{x}\int^{t} g(s)\,ds\,dt$$

$$y' = a + \int^{x} g(t)\,dt \Rightarrow y'' = g(x) \text{ olur.}$$

Birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin iyi tanımlı olması için gerekli şart, bilinmeyen fonksiyonun herhangi bir noktada değerinin bilinmesiydi. Buradan hareketle, ikinci dereceden denklemlerde tek çözüm elde edilmesi (iyi tanımlı olması) için yeterli şart, bilinmeyen fonksiyonun ve değerinin en az bir noktada bilinmesidir.

$$y' = 2x(1+y) \Rightarrow y = -1+ce^{x^2}, \quad y(0)=0$$

$$y = -1+e^{x^2}$$

Teorem 3.1. Eğer f, f_y ve $f_{y'}$, xyy' üç boyutlu uzayının bir IR açık bölgesinde sürekli ise,

$$y'' = f(x,y,y'), \quad y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0'$$

denkleminin x_0 civarında $y=\phi(x)$ olacak şekilde bir tek çözümü vardır. İkinci mertebeden diferansiyel denklemlerin lineer olup olmadıkları, aynı birinci mertebe denklemlerde olduğu gibidir. Buna göre ikinci mertebeden en genel anlamda bir lineer diferansiyel denklem,

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$$

formundadır. Kabul edelim ki, ∀x elemanı için $P(x) \neq 0$ olsun.

Bu taktirde,

$$y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}y = \frac{G(x)}{P(x)}$$

$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ şeklindedir.

Teorem 3.2. Eğer p, q ve g; $\alpha < x < \beta$ açık aralığında sürekli, fonksiyonlar ise bir ve yalnız bir $y=\phi(x)$ fonksiyonu var ve bu;

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \quad , \; y(x_0) = y_0 \, , \; y'(x_0) = y_0'$$

denklemini $x \in \alpha, \beta$ için sağlar.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

denklemi homojen denklemdir. Hangi y değerleri için çözüm bulunur. Bu çözüme tamamlayıcı çözüm denir. Daha sonra $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ özel çözümlü denkleminden genel çözüm elde edilir. $(y_G = y_t + y_ö)$

Genel olarak ikinci mertebeden herhangi bir diferansiyel denklemi çözemeyiz. Ama aşağıdaki bazı özel durumlarda bu diferansiyel denklemleri önce birinci mertebeye düşürerek çözebiliriz.

1°) Kabul edelim ki, $y'' = f(x,y,y')$ denkleminde x yok olsun. Bu taktirde $y'' = f(y,y')$ olur. $y' = v$, $y'' = v'$ değişken dönüştürmesi yapılırsa, $\left(y'' = v' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = v \frac{dv}{dy}\right)$

$$f(y,v) = v \frac{dv}{dy} = \frac{dv}{dx} \quad \text{olur.}$$

Örnek// $yy'' + (y')^2 = 0$ denklemini çözünüz.

$y' = v$ değişken dönüştürmesi yapalım. $y'' = v \frac{dv}{dy}$ olur.

Denklemde yerine yazarsak,

$$\Rightarrow yv\frac{dv}{dy} + v^2 = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \ln v + \ln y = \ln c$$

$$\Rightarrow \ln v.y = \ln c$$

$$\Rightarrow v.y = c$$

v, yerine değerini yazarsak,

$$\Rightarrow y'y = c \Rightarrow \frac{dy}{dx} y = c \Rightarrow y\,dy = c\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = cx + c_1 \quad //$$

Örnek// $2y^2y'' + 2y(y')^2 = 1$ denklemini çözünüz.

$$y' = v \, , \quad y'' = v\frac{dv}{dy}$$

$$\Rightarrow 2y^2 v\frac{dv}{dy} + 2y v^2 = 1 \Rightarrow 2y^2 v\,dv + (2yv^2 - 1)\,dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} M_y &= 4yv \\ N_x &= 4yv \end{aligned}\right\}$$ tam dif. denklemdir.

$$G(y,v) = \int 2y^2 v\,dv + h(y) = y^2v^2 + h(y)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 2yv^2 + h'(y) = 2yv^2 - 1$$

$$\Rightarrow h'(y) = -1 \quad \Rightarrow h(y) = -y + c$$

$$y^2x^2 - y + c = 0$$

$$\Rightarrow y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y + c = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{c-y}{y^2}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\left(\frac{c-y}{y^2}\right)^{1/2}} = dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{y\,dy}{(c-y)^{1/2}} = \int dx$$

$$\Rightarrow \quad u = c-y \Rightarrow du = -dy \qquad \Rightarrow -\int \frac{c-u}{\sqrt{u}}\,du = x$$
$$y = c-u$$

$$\Rightarrow -\int \frac{c}{u^{1/2}}\,du + \int \frac{u}{u^{1/2}}\,du$$

$$= -c\,2(c-y)^{1/2} + \frac{2}{3}(c-y)^{3/2} + c_1 = x \;//$$

2°) Eğer denklemde y yok ise denklem, $y'' = f(x,y')$ şeklinde olur.

$y' = v,\; y'' = \frac{dv}{dx} = f(x,v)$ Aynı 1°) deki gibi çözülür.

Örnek// $x^2y'' + 2xy' - 1 = 0 \quad , x > 0$

$y' = v,\; y'' = \frac{dv}{dx}$ denklemde yerine koyalım.

$$\Rightarrow x^2\frac{dv}{dx} + 2xv = 1 \Rightarrow \frac{dv}{dx} + \frac{2v}{x} = \frac{1}{x^2}$$ lineer denklem.

$$v = x^{-2}\left[\int^x t^2\frac{1}{t^2}\,dt + c\right] \Rightarrow v = x^{-1} + cx^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{-1} + cx^{-2} \Rightarrow \int dy = \int (x^{-1} + cx^{-2})\,dx$$

$$\Rightarrow \quad y = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{c}{x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad y = \ln x - \frac{c}{x} + c_1 \;//$$

Örnek // $2x^2y''+(y')^3=2xy'$, $x>0$

$y'=v$ $\quad y''=\frac{dv}{dx}$ denklemde yerine yazalım.

$$\Rightarrow 2x^2\frac{dv}{dx}+v^3=2xv \Rightarrow \frac{dv}{dx}-\frac{v}{x}=-\frac{v^3}{2x^2}$$ (bernoulli)

$$\Rightarrow z=v^{1-3} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=-\frac{1}{2v^3}\frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{dv}{dx}=-\frac{1}{2}v^3\frac{dz}{dx}$$ denklemde yazalım.

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}v^3\frac{dz}{dx}-\frac{v}{x}=-\frac{v^3}{2x^2} \Rightarrow \frac{dz}{dx}+\frac{2z}{x}=\boxed{\frac{1}{2x^2}}$$

→ $\frac{1}{x^2}$ olmalı

hatalı//

$$z=x^{-2}\left[\int^x t^2\frac{1}{2t^2}\,dt+c\right]$$

$$=x^{-2}\left(\frac{x}{2}+c\right)=\frac{1}{2}x^{-1}+cx^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v^2}=\underset{(x)}{\frac{1}{2x}}+\underset{(2)}{\frac{c}{x^2}} \Rightarrow \frac{1}{v^2}=\frac{x+c}{2x+x^2}$$

$$\Rightarrow v^2=\frac{2x+x^2}{x+c} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\left(\frac{x^2}{c+\frac{1}{2}x}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \int dy=\int\left(\frac{x^2}{c+\frac{1}{2}x}\right)^{1/2}dx \Rightarrow y=\int\frac{x}{(c+\frac{x}{2})^{1/2}}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}=u \Rightarrow x=2u \Rightarrow dx=2du$$

$$\Rightarrow y=\int\frac{2u\cdot 2du}{\sqrt{c+u}}=4\int\frac{u\,du}{\sqrt{c+u}}$$

$v=c+u$, $dv=du$

$u=v-c$

$$\Rightarrow 4\int\frac{v-c}{\sqrt{c+(v-c)}}\,dv=4\int\frac{v-c}{\sqrt{v}}\,dv=4\int\frac{v}{\sqrt{v}}\,dv-4\int\frac{c}{\sqrt{v}}\,dv$$

$$\Rightarrow 4\int v^{1/2}dv-4c\int v^{-1/2}dv=4\cdot\frac{2}{3}v^{3/2}-8c\,\underline{v^{1/2}}+c_1$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3}v^{3/2}-8cv^{1/2}+c_1 \Rightarrow \frac{8}{3}(c+u)^{3/2}-8c(c+u)^{1/2}+c_1$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3}\left(c+\frac{x}{2}\right)^{3/2}-8c\left(c+\frac{x}{2}\right)^{1/2}+c_1$$

$$\Rightarrow y=\frac{8}{3}\left(c+\frac{x}{2}\right)^{3/2}-8c\left(c+\frac{x}{2}\right)^{1/2}+c_1$$ //

yanlış sonuç//

Homojen Diferansiyel Denklemlerin Temel Çözüm Kümeleri

P ve q, $\alpha < x < \beta$ aralığında sürekli fonksiyonlar ve ϕ'de iki defa diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere bir L operatörünü ;

$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi$ şeklinde tanımlayalım.

$L[\phi](x) = \phi''(x) + P(x)\,\phi'(x) + q(x)\,\phi(x) = 0$

$L(y) = y'' + Py' + qy$ şeklinde yazılabilir.

Örneğin; $\phi(x) = \sin x$, $P(x) = x^2$, $q(x) = x$ alırsak

$L[\sin x] = -\sin x + x^2(\cos x) + x\sin x$

Teorem 3.3. Kabul edelim ki, $y = y_1(x)$ ve $y = y_2(x)$,

$L(y) = y'' + Py' + qy = 0$ ------ (1)

denkleminin çözümleri olsun. Gösteriniz ki,

$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

denkleminin çözümleridir. (c_1 ve c_2 herhangi iki sabit)

İspat// $y_1(x)$, (1)'in çözümü olduğundan $L(y_1) = y_1'' + Py_1' + qy_1 = 0$

$y_2(x)$, (1)'in " " $L(y_2) = y_2'' + Py_2' + qy_2 = 0$ dır.

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = (c_1y_1 + c_2y_2)'' + P(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2)$$

$$= c_1(y_1'' + Py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + P\,y_2' + qy_2)$$

$$= c_1 \underset{\overset{\parallel}{0}}{L[y_1]} + c_2 \underset{\overset{\parallel}{0}}{L[y_2]} = 0$$

Bu özelliği sağlayan L fonksiyonu lineerdir.

($c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \Rightarrow$ genel çözümdür.)

1. Örnek// $y'' - y = 0$, $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ olsun.

$y_1'(x) = e^x$, $y_1''(x) = e^x$,

$\Rightarrow y'' - y = e^x - e^x = 0$ lineer kombinasyonlarını alalım.

$\Rightarrow (c_1e^x + c_2e^{-x}) - (c_1e^x + c_2e^{-x}) = 0$

Bu verilen denklem, $y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$ denkleminin özel halidir.

Burada $P(x) = 0$, $q(x) = 1$ olarak verilmiştir.

• $y''-y=1$ olsun. , $y_1(x)=e^x-1$

$e^x-e^x+1=1$ $y_2(x)=2e^x-2=2(e^x-1)=2y_1(x)$ verilsin.

$\Rightarrow 2e^x-2e^x+2\neq 1$ O halde denklem sağlamaz.

2. örnek // $y''+y^2=0$, $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ denklemin çözümleri ise

$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ denklemin çözümü olur.

$$L[y]=y''+y^2=0$$

$$L[y_1]=y_1''+y_1^2=0$$

$$L[y_2]=y_2''+y_2^2=0$$

$$\Rightarrow L[c_1y_1+c_2y_2]=(c_1y_1+c_2y_2)''+(c_1y_1+c_2y_2)^2=0$$

$$=c_1y_1''+c_2y_2''+c_1^2y_1^2+2c_1c_2y_1y_2+c_2^2y_2^2\neq 0$$

O halde bu denklemin iki çözümü de denklemi sağlamaz. Bu denklem lineer olmayan diferansiyel denklemdir.

İspat edildi ki, eğer y_1 ve y_2,(1) denkleminin çözümleri ise bunların lineer kombinasyonu olan $c_1y_1+c_2y_2$ de (1) denkleminin çözümleridir. Görüleceği üzere (1) denkleminin, c_1 ve c_2 yi değiştirerek sonsuz tane çözümünü elde edebiliriz. Şimdi şu soruya cevap arayalım. Bu sonsuz çözüm (1) denkleminin bütün mümkün çözümlerini kapsar mı?

Eğer (1) denkleminin her çözümü y_1 ve y_2'nin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir ise y_1 ve y_2 ye tenel çözüm kümeleri adı verilir.

Teoren 3.4. Kabul edelim ki, P ve q , $\alpha<x<\beta$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar, y_1 ve y_2 (1) denkleminin çözümleri olsun. Eğer bu çözümler $\alpha<x<\beta$ aralığındaki her noktada

$$y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)\neq 0$$

şartını sağlıyorlar ise bu aralıkta (1) denkleminin her çözümünü y_1 ve y_2 nin bir lineer kombinasyonu olarak bir tek şekilde ifade edilebilir.

İspat // Diyelim ki, $y=\phi(x)$ verilsin. ve $x_0\in(\alpha,\beta)$ aralığında seçelim.

$y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$

$\phi(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0$

$\phi'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y_0'$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \underbrace{y_1(x_0)}_{\neq 0} y_2'(x_0) - y_1'(x_0) \underbrace{y_2(x_0)}_{\neq 0} \neq 0$$ olmalıdır.

$\forall x_0$ için olduğundan özel olarak x için de sağlanır.

3.Örnek // $y'' - y = 0 \qquad y_1(x) = e^x \quad y_2(x) = e^{-x}$

(Eger bir denklem ikinci dereceden ise en fazla 2 çözümü vardır.)

$y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x) = e^x(-e^{-x}) - e^{-x} e^x = -2 \neq 0$

$\operatorname{sh} x$ ve $\operatorname{ch} x$, $y'' - y = 0$ denkleminin çözümleridir.

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$
$$= c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2} \quad c_2 = -\frac{1}{2}$ seçersek aynı sonuç çıkar.

$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2} \quad c_2 = \frac{1}{2}$ seçersek " " ".

4.Örnek // Gösteriniz ki, $y_1(x) = x^{1/2}$ ve $y_2(x) = \frac{1}{x}$,

$2x^2 y'' + 3x y' - y = 0$, $x > 0$ denkleminin temel çözüm kümeleridir.

- $2x^2 (x^{1/2})'' + 3x (x^{1/2})' - (x^{1/2}) = 2x^2 \left(-\frac{1}{4} x^{-3/2}\right) + \frac{3x}{2} x^{-1/2} - x^{1/2} = 0$
- $2x^2 \left(\frac{1}{x}\right)'' + 3x \left(\frac{1}{x}\right)' - \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4x^2}{x^3} - \frac{3x}{x^2} - \frac{1}{x} = 0$

$y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) \neq 0$?

$x^{1/2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \left(\frac{1}{2} x^{-1/2} \cdot \frac{1}{x}\right) = -\frac{3}{2} x^{-3/2} \neq 0 \quad x > 0$ olduğundan.

★★ Bir açık aralıkta diferansiyellenebilir y_1 ve y_2 fonksiyonları verilsin. $y_1 y_2' - y_2 y_1'$ ifadesi y_1 ve y_2'nin Wronskien'i olarak bilinir ve

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$ olarak yazılır.

$W(y_1, y_2)(x)$, $W(x)$ olarak gösterilir.

- $W(\sin x, \cos x) = 1$, $W(e^{-x}, e^x) = 2$

Teorem 3.5. $\alpha < x < \beta$ aralığı üzerinde sürekli P ve q fonksiyonları verilsin. Ve kabul edelim ki, y_1 ve y_2, (1) denkleminin bu aralıkta çözümleri olsunlar. Bu aralıkta; $W(y_1, y_2)$ ya özdeş olarak sıfıra denktir veya hiçbir zaman sıfır olamaz.

y_1, (1)'in çözümü olduğundan $L(y_1) = y_1'' + Py_1' + qy_1 = 0 \;/ y_2 \ldots($a

y_2, (1) in 〃 〃 $L(y_2) = y_2'' + Py_2' + qy_2 = 0 \;/ y_1 \ldots($b

$$\Rightarrow y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + P(x)\,(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0 \qquad (y_1 b - y_2 a\text{'dan})$$

$$\Rightarrow W'(x) = \cancel{y_1'(x) y_2'(x)} + y_1(x) y_2''(x) - \cancel{y_2'(x) y_1'(x)} - y_2(x) y_1''(x)$$

$\Rightarrow W'(x) + P(x) W(x) = 0$ değişkenlerine ayrılabilen dif. denk. dir.

$W'(x)\, e^{\int P(x)dx} + P(x)\, e^{\int P(x)dx} . W(x) = 0$ (denklemi $\mu(x)$ ile çarparak)

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left[e^{\int P(x)dx} . W(x)\right] = 0 \Rightarrow W(x) . e^{\int P(x)dx} = c$$

$$\Rightarrow \underline{W(x) = c . e^{-\int P(x)dx}} \;//$$

P(x) sonlu bir değere sahiptir ve sürekli olduğundan, integrali sıfır olamaz. W fonksiyonu sıfıra eşittir. integral değeri ∞ olur. ya da hiçbir zaman sıfırdan farklı olamaz. Fonksiyon o aralıkta sürekli olduğundan c=0 ise sıfıra denktir.

Bu, Abel tarafından ispatlanmış bir teoremdir. Cebir dersinde ve analizdeki eliptik denklemlerin çözümlerinde yardımcı olur.

5. örnek // $2x^2 y'' + 3xy' - y = 0 \qquad x > 0$

$$y'' + \frac{3}{2x} y' - \frac{y}{2x^2} = 0$$

$$W(y_1, y_2)(x) = c\, e^{-\int P(x)dx} = c\, e^{-\frac{3}{2}\ln x} = c\, x^{-3/2} > 0$$

c=0 için sıfıra denktir. y_1 ve y_2 temel çözüm kümeleridir.

özel olarak $c = -\frac{3}{2}$ alırsak, $W(y_1, y_2)(x) = -\frac{3}{2} x^{-3/2}$ olur.

Teorem 3.6. Kabul edelim ki, P ve q, $\alpha < x < \beta$ aralığında sürekli fonksiyonlar olsun. Bu taktirde bu aralık üzerinde,

$$L[y] = y'' + P(x) y' + q(x) y = 0$$

denkleminin daima temel çözüm kümeleri vardır.

$x_0 \in (\alpha,\beta)$ alalım. Teorem 3.2 'den bu diferansiyel denklemin bir çözümü vardır ve tektir. Kabul edelimki bu çözüm y_1 ve y_2 olsun.

$$y_1''+P(x)y_1'+q(x)y_1=0 \qquad y_1(x_0)=1\ ,\ y_1'(x_0)=0$$

$$y_2''+P(x)y_2'+q(x)y_2=0 \qquad y_2(x_0)=0\ ,\ y_2'(x_0)=1$$

$$W(y_1,y_2)(x_0)=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

O halde y_1 ve y_2 temel çözüm kümeleridir.

Alıştırmalar

1- Kabul edelim ki, $y=\phi(x)$, $y''+P(x)y'+q(x)y=g(x)$ $(g(x)\neq 0)$ denkleminin çözümü olsun. $y=c\,\phi(x)$'in verilen denklemi $c\neq 1$ için sağlamayacağını gösterin.

Çözüm// $y=\phi(x)$ denklemi sağlıyor ise,

$$\phi''(x)+P(x)\phi'(x)+q(x)\phi(x)=g(x)$$

$$\Rightarrow \phi''(x)+P(x)\phi'(x)+q(x)\phi(x)-g(x)=0$$

$$\Rightarrow (c\phi(x))''+P(x)(c\phi(x))'+q(x)(c\phi(x))-g(x)=0$$

$$\Rightarrow c\big(\underbrace{\phi''(x)+P(x)\phi'(x)+q(x)\phi(x)-g(x)}_{0}\big)+\underbrace{(c-1)g(x)}_{0}=0$$

$$\Rightarrow (c-1)g(x)=0 \Rightarrow c-1=0 \Rightarrow c=1 \text{ olmalı.}$$

2- Kabul edelim ki, ϕ,ϕ_1,ϕ_2 diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Gösteriniz ki,

$$W(\phi\phi_1,\phi\phi_2)=\phi^2\,W(\phi_1,\phi_2) \quad \text{dir.}$$

Çözüm// $$W(\phi\phi_1,\phi\phi_2)=\begin{vmatrix}\phi\phi_1 & \phi\phi_2\\ (\phi\phi_1)' & (\phi\phi_2)'\end{vmatrix}=\phi\phi_1(\phi'\phi_2+\phi_2'\phi)-\phi\phi_2(\phi'\phi_1+\phi\phi_1')$$

$$=\cancel{\phi\phi'\phi_1\phi_2}+\phi^2\phi_1\phi_2'-\cancel{\phi\phi'\phi_1\phi_2}-\phi^2\phi_2\phi_1'$$

$$=\phi^2(\phi_1\phi_2'-\phi_1'\phi_2)$$

$$=\phi^2\,W(\phi_1,\phi_2)$$

//

3 – Kabul edelim ki, $y''+\frac{1}{2x}y'+e^{x}y=0$ denkleminin temel çözüm kümeleri olan y_1 ve y_2 verilmiş olsun. Ve $W(y_1,y_2)(1)=2$ olduğuna göre $w(y_1,y_2)(5)=?$

Çözüm // $w(y_1,y_2)(x)=ce^{-\int p(x)dx}=ce^{-\frac{1}{2}\ln x}=\frac{c}{x^{1/2}}$

$w(y_1,y_2)(1)=\frac{c}{1}=2 \Rightarrow c=2$

$w(y_1,y_2)(5)=\frac{2}{5^{1/2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ dir. //

4– Eğer, $P(x)y''+q(x)y'+R(x)y=0$ (1) denklemi, $[P(x)y']'+[f(x)y]'=0$ şeklinde yazılabilirse, (1) denklemine tam diferansiyel denklem adı verilir. (1) denkleminin tam diferansiyel denklem olması için gerekli şart, gösteriniz ki,

$P''(x)-q'(x)+R(x)=0$ olmasıdır.

Çözüm // $\Rightarrow P(x)y''+P'(x)y'+f(x)y'+f'(x)y=0$ (türev olarak)

$\Rightarrow P(x)y''+\underline{(P'(x)+f(x))}y'+\underline{f'(x)}y=0$

$\Rightarrow P'(x)+f(x)=q(x)$ ve $f'(x)=R(x)$ olmalıdır.

$\Rightarrow P''(x)+f'(x)=q'(x) \Rightarrow P''(x)+R(x)=q'(x)$

$\Rightarrow \underline{P''(x)-q'(x)+R(x)=0} \Rightarrow$ tam dif. denklemdir.

a) $y''+xy'+y=0$, $P(x)=1$ $q(x)=x$ $R(x)=1$

$\Rightarrow P''-q'+R=-1+1=0$ $f'(x)=R(x)=1$, $f(x)=x$

$\Rightarrow [1.y']'+[x.y]'=0$ formunda yazılabilir.

$\Rightarrow y''+xy'+y=0$ olur. integral alırsak,

$\int y''dx+\int[xy]'dx=\int 0dx+c$

$\Rightarrow y'+xy=c$ lineer dif. denklem. 1. mertebeden.

$y=e^{-x^2/2}\left[\int e^{x^2/2}c\,dx+c_1\right]$

b) $y''+3x^2y'+xy=0$ $P(x)=1$ $q(x)=3x^2$ $R(x)=x$

$P''-q'+R=0-6x+x=-5x\neq0$ $(x\neq0)$

O halde bu denklem $x\neq0$ için tam diferansiyel denklem değildir.

$(P(x)y''+q(x)y'+R(x)y=0$ ... (1).)

5- Eğer bir ikinci mertebeden homojen diferansiyel denklem tam değilse, bir integral çarpanı vasıtasıyla yani $\mu(x)$ ile çarpılarak tam yapılabilir. Bunun anlamı, eğer (1) denklemi $\mu(x)$ ile çarpıldığında,

$$\mu(x)P(x)y''+\mu(x)q(x)y'+\mu(x)R(x)y=0$$

denklemi, $[\mu(x)P(x)y']'+[f(x)y]'=0$ şeklinde yazılır. Türev alırsak,

$\Rightarrow \mu(x)P(x)y''+\underline{(\mu'(x)P(x)+\mu(x)P'(x))}y'+f(x)y'+\underline{f'(x)}y=0$

$\Rightarrow \mu'(x)P(x)+\mu(x)P'(x)+f(x)=\mu(x)q(x)$ ve $\mu(x)R(x)=f'(x)$ olur.

Tekrar türev alırsak,

$\Rightarrow P(x)\mu''(x)+\mu'(x)P'(x)+\mu'(x)P'(x)+\mu(x)P''(x)+\mu(x)R(x)=\mu'(x)q(x)+q'(x)\mu(x)$

$\Rightarrow P(x)\mu''(x)+\mu'(x)\left(2P'(x)-q(x)\right)+\mu(x)\left(P''(x)+R(x)-q'(x)\right)=0$

Bu denkleme (1) denkleminin ek diferansiyel denklemi denir.

Lineer Bağımsızlık

İkinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin genel çözüm kavramı, iki çözümün lineer kombinasyonu, ki bu çözümlerin Wronskien'inin sıfırdan farklı olması, iki fonksiyonun lineer bağımsız olmasıyla ilgilidir.

$\alpha<x<\beta$ aralığında f ve g fonksiyonlarına lineer bağımlıdır denir. Eğer k_1 ve k_2 sabitleri var ve her ikisi de sıfır değil, öyle ki

$k_1f(x)+k_2g(x)=0$ ise.

Aksi taktirde f ve g'ye lineer bağımsızdır denir.

1. Örnek// Gösteriniz ki, $\sin x$ ve $\cos(\frac{\pi}{2}+x)$ fonksiyonları lineer bağımlıdır.

k_1 ve k_2 sabitleri var ve bunlar sıfırdan farklı, öyle ki,

$k_1\sin x+k_2\cos(x+\frac{\pi}{2})=0$ dır.

$\Rightarrow k_1\sin x+k_2(\cos x\underset{0}{\cos\frac{\pi}{2}}-\sin x\sin\frac{\pi}{2})=0$

$\Rightarrow (k_1-k_2)\sin x=0$

$k_1=k_2\neq 0$ alalım, bu taktirde $0.\sin x=0 \Rightarrow \sin x$ ve $\cos(x+\frac{\pi}{2})$ lineer bağımlı fonksiyonlardır.

- $\underline{k_1}e^x+\underline{k_2}e^{-x}=0 \Rightarrow k_1=k_2=0$ olmalıdır. Lineer bağımlılardır.

2.Örnek// Gösteriniz ki, e^x ve e^{2x} fonksiyonları lineer bağımsızdır.

$k_1 e^x + k_2 e^{2x} = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 0$ ise lineer bağımsızdır.

$x_0 \in (\alpha,\beta)$, $k_1 e^{x_0} + k_2 e^{2x_0} = 0$

$x_1 \neq x_0$, $x_1 \in (\alpha,\beta)$, $k_1 e^{x_1} + k_2 e^{2x_1} = 0$

$$\begin{vmatrix} e^{x_0} & e^{2x_0} \\ e^{x_1} & e^{2x_1} \end{vmatrix} = \underset{\neq 0}{e^{x_0+x_1}}(\underset{\neq 0}{e^{x_1}-e^{x_0}})$$

(Katsayılar matris determinantı $\neq 0$ ise tek çözüm vardır 0'da sıfır çözümdür. $k_1 = k_2 = 0$ dır.)

Teorem 3.7. Kabul edelim ki, f ve g diferansiyellenebilir $(\alpha < x < \beta)$ fonksiyonlar ve herhangi bir $x_0 \in (\alpha,\beta)$ için $w(f,g)(x_0) \neq 0$ ise bu aralıkta f ve g fonksiyonları lineer bağımsızdır. Veya her $x \in (\alpha,\beta)$ için $w(f,g)(x) = 0$ ise f ve g fonksiyonları lineer bağımlıdır.

İspat// $k_1 f(x) + k_2 g(x) = 0$, (lineer bağımlıdır.)

Herhangi bir $x_0 \in (\alpha,\beta)$ olsun.

$k_1 f(x_0) + k_2 g(x_0) = 0$

$\Rightarrow k_1 f'(x_0) + k_2 g'(x_0) = 0$ olur, ki bu da türevidir.

$$w(f,g)(x_0) = \begin{vmatrix} f(x_0) & g(x_0) \\ f'(x_0) & g'(x_0) \end{vmatrix} = f(x_0)g'(x_0) - g(x_0)f'(x_0) \neq 0$$

O halde f ve g lineer bağımsız fonksiyonlardır (O halde denklem sisteminin tek çözümü vardır. O'da sıfır çözümdür.)

Örnek// $k_1 e^{x_0} + k_2 e^{2x_0} = 0$

$k_1 e^{x_0} + 2k_2 e^{2x_0} = 0$

$$w(f,g)(x_0) = \begin{vmatrix} e^{x_0} & e^{2x_0} \\ e^{x_0} & 2e^{2x_0} \end{vmatrix} = e^{3x_0} \neq 0$$ denklem sisteminin tek çözümü vardır.

Örnek// Gösteriniz ki, $\sin x$ ve $\cos(x + \frac{\pi}{2})$ fonksiyonları lineer bağımlıdır.

$$w(f,g)(x) = \begin{vmatrix} \sin x & -\sin x \\ \cos x & -\cos x \end{vmatrix} = -\sin x \cos x + \sin x \cos x = 0$$

O halde bu fonksiyonlar lineer bağımlıdır.

Şimdiye kadar yaptığımız işleri aşağıdaki şekilde özetleyebiliriz.

Kabul edelim ki, P ve q, $\alpha<x<\beta$ aralığında sürekli ve y_1 ve y_2 de, $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ denkleminin çözümleri olsunlar. Bu taktirde aşağıdaki dört durum denktir yani biri diğer üçünü gerektirir.

1- $\alpha<x<\beta$ aralığı üzerinde y_1 ve y_2 temel çözüm kümeleridir.

2- $\alpha<x<\beta$ " " " lineer bağımsızdır.

3- Herhangi bir $x_0\in(\alpha,\beta)$ için $W(y_1,y_2)\neq 0$ dır.

4- Her $x\in(\alpha,\beta)$ için $W(y_1,y_2)(x)\neq 0$ dır.

Alıştırmalar :

1- Kabul edelim ki, y_1 ve y_2;

$$y''+P(x)y'+q(x)y=0$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun. Gösteriniz ki;

c_1y_1, c_2y_2 'de verilen denklenin lineer bağımsız çözümleridir.

$$W(c_1y_1,c_2y_2)=\begin{vmatrix} c_1y_1 & c_2y_2 \\ (c_1y_1)' & (c_2y_2)' \end{vmatrix} = c_1y_1c_2y_2' - c_1y_1'c_2y_2$$

$$=c_1c_2(y_1y_2'-y_1'y_2)\neq 0$$

O halde c_1y_1 ve c_2y_2 lineer bağımsız çözümleridir. //

2- Kabul edelim ki y_1 ve y_2, $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun. Gösteriniz ki,

$y_3=y_1+y_2$, $y_4=y_1-y_2$ temel çözüm kümeleridir.

$$W(y_3,y_4)=\begin{vmatrix} y_3 & y_4 \\ (y_3)' & (y_4)' \end{vmatrix} = y_3y_4' - y_4y_3'$$

$$=(y_1+y_2)(y_1'-y_2')-(y_1-y_2)(y_1'+y_2')$$

$$=\underline{y_1y_1'}+y_1y_2'+\underline{y_2y_1'}-\underline{y_2y_2'}-\underline{y_1y_1'}-y_1y_2'+y_2y_1'+\underline{y_2y_2'}$$

$$=y_1y_2'+y_2y_1'-y_1y_2'+y_2y_1'$$

$$=-2\,\underset{\overset{\#}{0}}{W(y_1,y_2)}\neq 0$$

O halde y_3 ve y_4 lineer bağımsız

3 - Gösteriniz ki, y_3 ve y_4 lineer bağımsız ise, y_1 ve y_2 temel çözüm kümeleridir.

(Temel çözüm: denklemin çözümü, lineer kombinasyon olacak ve lineer bağımsız.)

Önceki soruda; $-2W(y_1,y_2)\neq 0$ olduğundan y_1 ve y_2 lineer bağımsız olur.

Mertebe Düşürülmesi

Eğer ikinci mertebeden lineer bir diferansiyel denklemin bir özel çözümü biliniyor ise denklemin genel çözümü, dolayısıyla ikinci lineer bağımsız çözümü aşağıda vereceğimiz D'Alembert metoduyla bulunur.

Şimdi kabul edelim ki, $y_1(x)$, $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ denkleminin bir özel çözümü olarak verilmiş olsun. Bu taktirde, gösterildi ki, c_1y_1 de bu diferansiyel denklemin çözümüdür. Şimdi c_1 yerine herhangi bir $v(x)$ fonksiyonu yazalım. Ve kabul edelim ki, verilen diferansiyel denklem, $y(x)=y_1(x)v(x)$ formunda bir genel çözüme sahip olsun.

$$y'=y_1'(x)v(x)+y_1(x)v'(x)$$

$$y''=y''(x)v(x)+2y_1'(x)v(x)+y_1(x)v''(x)$$ denklemde yazalım.

$$\Rightarrow \Big(y_1''(x)v(x)+2y_1'(x)v'(x)+y_1(x)v''(x)+P(x)\big(y_1'(x)v(x)+y_1(x)v'(x)\big)+$$
$$+q(x)y_1(x)v(x)=0$$

$$\Rightarrow y_1(x)v''(x)+\big(2y_1'(x)+P(x)y_1(x)\big)v'(x)+\big(\underbrace{y_1''(x)+P(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x)}_{0}\big)v(x)=0$$

$$\Rightarrow y_1(x)v''(x)+\big(2y_1'(x)+P(x)y_1(x)\big)V'(x)=0$$ $y_1(x)$'e bölelim.

$$\Rightarrow \left(v''(x)+\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)}+P(x)\right)v'(x)=0$$ $v'(x)$ e göre lineer denklemdir.

$V'(x)=u(x)$ dersek, $u'(x)+\left(\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)}+P(x)\right)U(x)=0$ olur.

$$v'(x)=U(x)=ce^{-\int\left(\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)}+p(x)\right)dx}=\boxed{\frac{c}{(y_1(x))^2}e^{-\int P(x)dx}}$$

$$\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1(x)^2}=w_1(x)$$ diyelim.

$\Rightarrow v'(x) = c.u_1(x) \Rightarrow v(x) = c\int u_1(x)\,dx + c_1$

$y = y_1(x).v(x) = c\,y_1(x)\int u_1(x)\,dx + c_1 y_1(x)$

$\underline{y = y_1(x)}$, $\underline{y = y_2(x) = y_1(x)\int u_1(x)\,dx}$ ($\int u_1(x)\,dx$ sabit olmadığından, y_1 ve y_2 lineer bağımsızdır.)

Örnek// $2x^2y'' + 3xy' - y = 0 \quad x>0$, $y_1(x) = x^{1/2}$

$y = x^{1/2}v(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}v(x) + x^{1/2}v'(x)$

$y'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}v(x) + x^{-1/2}v'(x) + x^{1/2}v''(x)$ denklemde yazalım.

$$\Rightarrow 2x^2\left(-\frac{1}{4}x^{-3/2}\underbrace{v(x)}_{v} + x^{-1/2}\underbrace{v'(x)}_{v'} + x^{1/2}\underbrace{v''(x)}_{v''}\right) + 3x\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\underbrace{v(x)}_{v} + x^{1/2}\underbrace{v'(x)}_{v'}\right) - x^{1/2}\underbrace{v(x)}_{v} = 0$$

$\Rightarrow 2x^{5/2}v'' + (2x^{3/2} + 3x^{3/2})v' = 0$

$\Rightarrow v'' + \frac{5}{2x}v' = 0 \Rightarrow v'$ ye göre lineerdir.

$v'(x) = c\,e^{-\int\frac{5}{2x}dx} = \frac{c}{x^{5/2}} \Rightarrow v(x) = -\frac{2}{3}c\,x^{-3/2} + c_1$

$y = x^{1/2}\left(c_1 - \frac{2}{3}c\,x^{-3/2}\right)$, $y_1(x) = x^{1/2}$ $y_2(x) = \frac{1}{x}$ olarak bulunur.

Veya

$y'' + \frac{3}{2x}y' - \frac{1}{2x^2}y = 0$ formuna indirgeyip, $(y'' + p(x)y' + q(x)y = 0)$

$v'(x) = u(x) = \frac{c}{(y_1(x))^2}e^{-\int p(x)dx}$ den çözeriz.

$= \frac{c}{x}e^{-\int\frac{3}{2x}dx} = \frac{c}{x^{5/2}}$ den çözülür.

Örnek// Gösteriniz ki, $y = \underline{x}$, $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $-1 < x < 1$

denkleminin bir çözümüdür. İkinci lineer bağımsız çözümü bulunuz.

$y = \underline{x}.v(x)$ $\quad v'(x) = \frac{c}{(y_1(x))^2}e^{-\int p(x)dx} = \frac{c}{x^2}e^{+\int\frac{2x}{1-x^2}dx}$

$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0$ $\quad = \frac{c}{x^2}e^{-\ln(1-x^2)}$

$= \frac{c}{x^2(1-x^2)}$

$v(x) = c\int\frac{1}{x^2(1-x^2)}dx + c_1$

$\left.\begin{array}{l}-1<x<0\\ 0<x<1\end{array}\right\}$ sıfır 'da çözüm yoktur.

$$\Rightarrow V(x) = c\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)\right) + c_1$$

$$= c\left(-\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}\right) + c_1$$

$y = x\,V(x)$ den,

$$y = -c + cx\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2} + xc_1$$

$$y_1(x) = x$$

$$y_2(x) = -1 + x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2} \quad (c=1 \text{ alarak})$$

Alıştırmalar

1 − N bir negatif olmayan tamsayı olmak üzere;

$$xy'' - (x+N)y' + Ny = 0 \qquad x>0$$

denklemini gözönüne alalım.

a) Gösteriniz ki, $y_1(x) = e^x$ verilen denklemin bir çözümüdür.

b) Gösteriniz ki, ikinci lineer bağımsız çözüm $y_2(x) = c\,e^x\int x^N e^{-x}dx$ formundadır. $N=1$ ve $N=2$ için $y_2(x)$'i hesaplayarak, $c = \frac{-1}{N!}$ olmak üzere $y_2(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^N}{N!}$ olur.

Çözüm// a) $xe^x - (x+N)e^x + Ne^x = xe^x - xe^x - Ne^x + Ne^x = 0$ olur.

b) $y = \underline{\underline{e}}^x v(x) \qquad v'(x) = \frac{c}{(y_1(x))^2}e^{-\int P(x)dx}$

$$xy'' - (x+N)y' + Ny = 0$$

$$\Rightarrow x.\left(e^x v(x)\right)'' - (x+N)\left(e^x v(x)\right)' + N\left(e^x V(x)\right) = 0$$

$$\Rightarrow xV''(x) + (x-N)V'(x) = 0$$

$$\Rightarrow V''(x) + \left(\frac{x-N}{x}\right)V'(x) = 0 \quad (\text{lineer denklem})$$

$$V'(x) = ce^{-\int\left(1-\frac{N}{x}\right)dx} = ce^{-x}x^N$$

$$y'' + P(x)y' = q(x)$$
$$y' = \frac{c}{\mu(x)}e^{\int P(x)dx}$$

$$\Rightarrow V(x) = c\int e^{-x}x^N dx + c_1$$

$$y' + P(x)y = q(x)$$
$$y = \frac{c}{\mu(x)}e^{\int P(x)dx}$$

$$\frac{V''(x)}{V(x)} + \frac{x-N}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \int\frac{V''(x)}{V'(x)}dx + \int\frac{x-N}{x}dx = \ln v'(x) + x - \ln x^N = c$$

$$\ln V'(x) = -x + \ln x^N + c \quad \Rightarrow$$

$v'(x) = e \qquad = e \, e \, e$

$= e^{-x} x^{N} c_1$ //

- $y = c y_1(x) \int e^{-x} x^{N} dx + c_1 y_1'(x)$

$y_1(x) = e^{x}$

$y_2(x) = c e^{x} \int e^{-x} x^{N} dx$ olur.

- $N=1$ için $y_2(x) = c e^{x} \int e^{-x} x \, dx$

$= c e^{x} (-x e^{-x} - e^{-x})$

$= c(-x-1)$

$y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^N}{N!}$

$c = 1$ için $= 1 + x$

$N = 2$ için, $y_2(x) = c e^{x} \int e^{-x} x^2 dx = c e^{x} (-x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x})$

$= c(-x^2 - 2x - 2)$

$= 1 + x + \frac{x^2}{2!}$

2. Kabul edelim ki; y_1, $y'' + P(x) y' + q(x) y = 0$ denkleminin sıfır olmayan bir çözümü olsun. İkinci lineer bağımsız çözümü verilen denklemin aşağıdaki verilen şekilde de bulunabileceğidir.

a) $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{W(y_1, y_2)}{y_1^2}$

$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2}$ ispat tamamlanır.

☆☆ $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{c e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2(x)} \Rightarrow \int \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' dx = c \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2(x)} dx + c_1$

$\Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = c \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2(x)} dx + c_1$

O halde $y_2 = c y_1 \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2(x)} dx + c_1$

$y = y_1(x)$, $\underbrace{y_2 = y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2(x)} dx}$ ikinci çözümdür.

Soru // $y_1(x) = x$, $x^2 y'' + 2x y' - 2y = 0$, $x > 0$

denkleminin bir çözümü olduğuna göre, ikinci lineer çözümü verilen formül yardımıyla bulunuz.

$\Rightarrow y''+\frac{2}{x}y'-\frac{2}{x^2}y=0$, $x>0$

$$y_2(x)=x\int\frac{e^{-\int\frac{2}{x}dx}}{x^2}dx = x\int\frac{1}{x^4}dx=\frac{1}{6x^2}$$ denklemde yazalım.

$$\Rightarrow x^2\left(\frac{1}{x^4}\right)-2x\left(\frac{1}{3x^3}\right)-\frac{1}{3x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3x^2}=0$$

$y_2(x)=\frac{1}{6x^2}$ denklemin bir diğer çözümü olur.

Sabit Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde a, b, ve c birer sabit ve $a\neq 0$ olmak üzere $ay''+by'+cy=0$ tipindeki diferansiyel denklemlerin genel çözümleri üzerinde duracağız.

$$ay''+by'+cy=0 \quad ---- (1)$$

(1) denklemini çözmek için, önce (1) denkleminin $y=e^{xr}$ formunda bir çözüme sahip olduğu kabul edilir ve r'nin aldığı değerlere göre genel çözüm oluşturulur. Yani $y=e^{xr}$ ----(2) ;

(2), (1)'de yerine konursa ;

$$ar^2e^{xr}+bre^{xr}+ce^{xr}=0$$

$\Rightarrow e^{xr}(ar^2+br+c)=0 \Rightarrow \underline{ar^2+br+c=0}$ ---- (3) olur. Buna karakteristik (yardımcı) denklem adı verilir. Bu, ikinci dereceden bir bilinmeyenli cebirsel (kuadratik) denklemdir.

$r_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ denklemin çözümlerini verir.

1° Durum : Kabul edelim ki, $b^2-4ac>0$ olsun.

Bu taktirde verilen denklemin çözümleri

$y=y_1(x)=e^{r_1x}$ $\left(r_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$ ve

$y=y_2(x)=e^{r_2x}$ $\left(r_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$ çözüm kümeleridir.

Lineer bağımsız olduğunu göstermek için Wronskien'e bakalım.

$$w(e^{r_1x},e^{r_2x})=\begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x}\end{vmatrix}=(r_2-r_1)e^{(r_1+r_2)x}=\left(\frac{\overset{\neq 0}{-\sqrt{b^2-4ac}}}{\underset{\neq 0}{a}}\right)e^{-b/a}\neq 0$$

O halde $y_1(x)$ ve $y_2(x)$, denklemin temel çözüm kümeleridir.

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$$ ((3) ün reel ve farklı iki kökü olmalıdır.)

Örnek 1.// $y''-y'-6y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$

denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm// Denklem sabit katsayılı olduğundan $y=e^{xr}$ formunda bir çözüme sahip midir? Ona bakalım.

$\Rightarrow e^{xr}(r^2-r-6)=0$

$\Rightarrow (r^2-r-6)=(r-3)(r+2)$ $r_1=3$, $r_2=-2$

$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}$

$y(0)=c_1+c_2=0$

$y'(x)=3c_1e^{3x}-2c_2e^{-2x}$

$y'(0)=3c_1-2c_2=2$

$$\begin{array}{l} 2/\ c_1+c_2=0 \\ \underline{\ \ 3c_1-2c_2=2\ \ } \\ c_1=2/5 \quad c_2=-2/5 \end{array}$$

$$y=\frac{2}{5}e^{3x}-\frac{2}{5}e^{-2x}$$

Örnek 2// $y''+2y'-4y=0$, denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y=e^{xr} \Rightarrow e^{xr}(r^2+2r-4)=0$

$(r^2+2r-4)=0 \Rightarrow r_1=1-\sqrt{5}$ $r_2=1+\sqrt{5}$

$y=c_1e^{1-\sqrt{5}}+c_2e^{1+\sqrt{5}}$

2° Durum: Kabul edelim ki $b^2-4ac=0$ olsun.

Bu taktirde (3) denkleminin çakışık iki kökü vardır ve bu kökler $r_1=r_2=-\frac{b}{2a}$ dır.

Yani (1) denkleminin $y=y_1(x)=e^{-\frac{b}{2a}x}$ şeklinde bir çözümü vardır. Verilen denklem ikinci dereceden olduğundan iki çözüm bulunur. Diğer ikinci lineer bağımsız çözümü, mertebenin düşürülmesi metodu ile aşağıdaki şekilde bulunur :

$$y = y_1(x)v(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} \cdot v(x)$$

$$y' = e^{-\frac{b}{2a}x} v' - \frac{b}{2a} e^{-\frac{b}{2a}x} \cdot v$$

$$y'' = e^{-\frac{b}{2a}x} v'' - \frac{b}{a} e^{-\frac{b}{2a}x} v' + \frac{b^2}{4a^2} e^{-\frac{b}{2a}x} v$$

Bu değerler (1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\Rightarrow a\left(e^{-\frac{b}{2a}x} v'' - \frac{b}{a} e^{-\frac{b}{2a}x} v' + \frac{b^2}{4a^2} e^{-\frac{b}{2a}x} v\right) + b\left(e^{-\frac{b}{2a}x} v' - \frac{b}{2a} e^{-\frac{b}{2a}} v\right) + c e^{-\frac{b}{2a}x} v = 0$$

Denklemi $e^{-\frac{b}{2a}x}$ parantezine alalım,

$$\Rightarrow e^{-\frac{b}{2a}x}\left(av'' + (-b+b)v' + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)v\right) = 0$$

$$-\frac{b^2}{4a} + c = \frac{-b^2+4ac}{4a} = 0 \qquad (b^2-4ac=0 \text{ olduğundan})$$

$$av'' = 0 \Rightarrow v'' = 0 \Rightarrow v(x) = c_1x + c_2$$

$$y = e^{-\frac{b}{2a}x}(c_1x + c_2) \quad (1) \text{ denkleminin genel çözümüdür.}$$

$$y_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}, \quad y_2 = xe^{-\frac{b}{2a}x}$$

$\Downarrow$

(çözüm olduğundan herhangi bir c katı da çözüm olur.)

Örnek 1// $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

denkleminin başlangıç değerlerini sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm// $y = e^{xr} \Rightarrow e^{xr}(r^2+4r+4) = 0$

$$\Rightarrow (r^2+4r+4) = 0 \Rightarrow (r+2)^2 = 0 \Rightarrow r = -2$$

O halde $y = e^{-2x}(c_1x + c_2)$ olur. (denklemin genel çözümüdür.)

$$y(0) = c_2 = 1, \quad y'(x) = -2e^{-2x}(c_1x + c_2) + c_1e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y'(0) = -2c_2 + c_1 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = 2c_2 = 2.1 = 2$$

O halde $y = e^{-2x}(2x+1)$ verilen denklemin başlangıç şartlarını sağlayan çözümüdür.

3° Durum : Kabul edelim ki, $b^2-4ac < 0$ olsun.

Bu taktirde (3) denkleminin kompleks(eşlenik) iki kökü vardır.

Yani, $r_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$, $r_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

$\lambda=-\frac{b}{2a}$, $\mu=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ denirse,

$$\left.\begin{array}{l} y=y_1(x)=e^{(\lambda+i\mu)x} \\ y=y_2(x)=e^{(\lambda-i\mu)x} \end{array}\right\} W(e^{(\lambda+i\mu)x},e^{(\lambda-i\mu)x})=$$

$$\Delta=\frac{-b\mp i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$=\begin{vmatrix} e^{(\lambda+i\mu)x} & e^{(\lambda-i\mu)x} \\ (\lambda+i\mu)e^{(\lambda+i\mu)x} & (\lambda-i\mu)e^{(\lambda-i\mu)x} \end{vmatrix}$$

$$=e^{\lambda x}(\lambda-i\mu-\lambda-i\mu)=-2i\mu e^{\lambda x}\neq 0$$ olur.

$e^{i\mu x}=\cos\mu x+i\sin\mu x$ (Euler açılımı)

$$ay''+by'+cy=0$$

$e^{(\lambda+i\mu)x}+e^{(\lambda-i\mu)x}=2e^{\lambda x}\cos\mu x$ reel

$e^{(\lambda+i\mu)x}-e^{(\lambda-i\mu)x}=2i\,e^{\lambda x}\sin\mu x$ kompleks

$W(e^{\lambda x}\cos\mu x, e^{\lambda x}\sin\mu x)\neq 0$

$y=e^{\lambda x}(c_1\cos\mu x+c_2\sin\mu x)$ çözümdür.

1. örnek// $y''+y'+y=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm// Denklem sabit katsayılı olduğundan $y=e^{xr}$ çözümü vardır.

$$e^{xr}(r^2+r+1)=0$$

$$\Rightarrow r^2+r+1=0 \Rightarrow r_{1,2}=\frac{-1\mp i\sqrt{3}}{2}$$

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$ dir.

2.örnek// $y''+9y=0$, $y(\frac{\pi}{2})=a$, $y'(\frac{\pi}{2})=b$ olan denklemin çözümünü bulunuz.

$$e^{xr}(r^2+9)=0 \Rightarrow r^2+9=0 \Rightarrow r^2=-9 \Rightarrow r=\mp 3i$$

$$y=(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$$

$$y(\tfrac{\pi}{2})=\left(c_1\cos\frac{3\pi}{2}+c_2\sin\frac{3\pi}{2}\right)=a$$

$c_2=-a$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}c_1+c_2\frac{\sqrt{2}}{2}=a$$

$$y'(x)=(-3\sin 3x\cdot c_1+3c_2\cos 3x)$$

$$y'(\tfrac{\pi}{2})=-3\sin\frac{3\pi}{2}c_1+3\cos\frac{3\pi}{2}=b$$

$3c_1=b$ $\quad c_1=\frac{b}{3}$ $\quad y=\frac{b}{3}\cos 3x-a\sin 3x$

1- $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ denkleminde bağımsız değişkenin uygun surette değiştirilmesiyle elde edilecek diferansiyel denklem, bazı özel $P(x)$ ve $q(x)$ değerleri için sabit katsayılı bir diferansiyel denkleme dönüşebilir. Şimdi, $P(x)$ ve $q(x)$'in üzerindeki şartları irdeleyelim.

$z=u(x)$ diyelim.

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$ olur.

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right)$ çarpımın türevidir. $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)=\frac{d}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)$

$=\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\,\frac{dy}{dx}\right)$

$=\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{dy}{dz}$ (denklemde yazalım) $=\frac{d^2y}{dz^2}$ olur.

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{dy}{dz}+P(x)\frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx}+q(x)y=0$$

$$\underbrace{\frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{q(x)}}_{\text{sabit}}\frac{d^2y}{dz^2}+\underbrace{\frac{\left(\frac{d^2z}{dx^2}+P(x)\frac{dz}{dx}\right)}{q(x)}}_{\text{sabit}}\frac{dy}{dz}+\underbrace{\frac{q(x)}{q(x)}}_{1}y=\frac{0}{q(x)} \qquad q(x)\neq 0$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=q(x)\Rightarrow\frac{dz}{dx}=(q(x))^{1/2}$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{d^2z}{dx^2}+P(x)\frac{dz}{dx}}{q(x)}=\text{sabit}=\frac{\frac{1}{2}(q(x))^{-1/2}q'(x)+P(x)(q(x))^{1/2}}{q(x)}=\frac{q'(x)+2P(x)q(x)}{2(q(x))^{3/2}}$$

$y''+P(x)y'+q(x)y=0$ denklemi yukarıdaki sabit katsayılı denklem şekline dönüşür.

Örnek// $xy''+(x^2-1)y'+x^3y=0$, $0<x<\infty$ diferansiyel denklemini sabit katsayılı denkleme dönüştürerek genel çözümünü bulunuz.

$y''+\frac{(x^2-1)}{x}y'+x^2y=0$, $0<x<\infty$

$P(x)=\frac{x^2-1}{x}$ $\quad q(x)=x^2$

$\frac{dz}{dx}=(q(x))^{1/2}=(x^2)^{1/2}=x\Rightarrow z=\frac{x^2}{2}$ //

$\frac{q'(x)+2P(x)q(x)}{2(q(x))^{3/2}}=\frac{2x+2\left(\frac{x^2-x}{x}\right)x^2}{2x^3}=\frac{2x^3}{2x^3}=1$ //

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{dy}{dz}+y=0$$ (sabit katsayılı homojen diferansiyel denklem)

$$y=e^{rz} \Rightarrow e^{rz}(r^2+r+1)=0$$

$$r_{1,2}=\frac{-1\mp i\sqrt{3}}{2}$$

$$y=e^{-\frac{1}{2}z}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}z+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$$ çözümüdür.

$\frac{dz}{dx}=x$ idi $z=\frac{x^2}{2}$ olur.

$$y=e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\right)$$

Örnek // $y''+x^3y'+x^2y=0 \quad x>0$

$$(q(x))^{1/2}=\frac{dz}{dx}=x \Rightarrow \frac{q'+2pq}{2q^{3/2}}=\frac{2x+2x^3x^2}{2x^3}\neq \text{sabit (değildir)}$$

O halde bu diferansiyel denklem hiçbir zaman sabit diferansiyel denklem değildir.

2 – α ve β birer sabit olmak üzere gösteriniz ki, $(x>0)$

$$x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0$$ (EULER diferansiyel denklemi)

diferansiyel denklemi, her zaman sabit katsayılı bir denkleme dönüşür.

$$y''+\frac{\alpha}{x}y'+\frac{\beta}{x^2}y=0 \quad , x>0$$

$$y''+\alpha p(x)y'+\beta\, q(x)y=0$$

$\frac{dz}{dx}=(q(x))^{1/2}=\frac{1}{x} \Rightarrow z=\ln x$ değişken dönüşümüyle denklem sabit katsayılı denklem olur.

$$\frac{q'(x)+2p(x).q(x)}{2(q(x))^{3/2}}=\frac{-\frac{2}{x^3}+2\frac{\alpha}{x}\cdot\frac{1}{x^2}}{2\frac{1}{x^3}}=(\alpha-1) \text{ sabittir.}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(\alpha-1)\frac{dy}{dz}+\beta y=0$$

a) $4x^2y''+3xy'+5y=0 \quad , x>0$

$$y''+\frac{3}{4x}y'+\frac{5}{4x^2}y=0$$

$$z=\ln x \;, \quad \frac{d^2y}{dz^2}+\left(\frac{3}{4}-1\right)\frac{dy}{dz}+\frac{5}{4}y=0$$

=)

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{4}\frac{dy}{dz} + \frac{5}{4}y = 0$$

$$y = e^{rz} \Rightarrow e^{rz}\left(r^2 - \frac{1}{4}r + \frac{5}{4}\right) = 0 \qquad r^2 - \frac{1}{4}r + \frac{5}{4} = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{1/4 \mp \sqrt{1/16 - 5}}{2} = \frac{1 \mp i\sqrt{15}}{8}$$

$$y = e^{\frac{1}{8}z}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{15}}{8}z + c_2\sin\frac{\sqrt{15}}{8}z\right) \qquad (z = \ln x)$$

$$y = e^{\frac{1}{8}\ln x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{15}}{8}\ln x + c_2\sin\frac{\sqrt{15}}{8}\ln x\right)$$

$\Rightarrow$ $y = x^{1/8}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{15}}{8}\ln x + c_2\sin\frac{\sqrt{15}}{8}\ln x\right)$ olur. //

3- Bağımlı değişkenin uygun surette değiştirilmesiyle, ikinci mertebe lineer homojen denklemlerle, birinci mertebe denklemler arasında ilişki kurulabilir.

a) Eğer $\frac{y'}{y} = -u$ derir ise $y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$ diferansiyel denkleminin Riccati diferansiyel denklemine dönüşeceğini gösteriniz.

$$y' = -uy \Rightarrow y'' = -(u'y + uy')$$

$$\frac{-(u'y + uy')}{y} - \frac{P(x)\,u.y}{y} + \frac{q(x)\,y}{y} = \frac{0}{y} \qquad (y \text{ ile bölerek})$$

$$\Rightarrow -u' + u^2 - P(x)u + q(x) = 0$$

$$u' = u^2 - P(x)u + q(x)$$

$\frac{du}{dx} = q(x) - P(x)u + u^2$ denklemi Riccati 'yi sağlar.

b) $\frac{dw}{dx} = q_0(x) + q_1(x)w + q_2(x)w^2$ olan Riccati diferansiyel denklemini gözönüne alalım. Gösteriniz ki,

$w = -\frac{y'}{yq_2}$ transformu Riccati denklemini

$q_2(x)y'' - [q_2'(x) + q_1(x)q_2(x)]y' + q_2^2(x)\,q_0(x)y = 0$ şeklindeki ikinci mertebe lineer denkleme dönüştürür.

$$\frac{dw}{dx} = \frac{[\text{illegible}]}{y^2q_2^{\,2}} = \frac{[\text{illegible}]}{y^2q_2^{\,2}}$$

$y^2q_2^2$ /
$$\frac{-y''yq_2 + y'^2q_2 + yy'q_2'}{y^2q_2^2} = q_0 + q_1\left(-\frac{y'}{yq_2}\right) + q_2\left(\frac{y'^2}{y^2q_2^{\,2}}\right)$$

$$\Rightarrow -y''\cancel{y}q_2 + \cancel{y'^2q_2} + \cancel{y}y'q_2' = q_0y^{\cancel{2}}q_2^2 - q_1y'\cancel{y}q_2 + \cancel{q_2y'^2} \qquad \text{(y'ye bölerek)}$$

$$\Rightarrow q_0yq_2^{\,2} - q_1q_2y' + y''q_2 - y'q_2' = 0$$

$$\Rightarrow y''q_2 - (q_2' + q_1q_2)y' + q_2^{\,2}q_0y = 0$$

$$\Rightarrow y''q_2(x) - [q_2'(x) + q_1(x)q_2(x)]y' + q_2^{\,2}(x)q_0(x)y = 0 \quad //$$

4- Bazen ikinci mertebe lineer diferansiyel denklemlerde birinci türevin yok edilmesi istenebilir. Eğer $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ denkleminde $y = u(x)\,v(x)$ yazılırsa uygun seçilecek $v(x)$'ler için (1) denklemini $u'' + f(x)u = 0$ şeklindeki bir denkleme indirgemek mümkündür. $v(x)$ ve $f(x)$'i, $p(x)$ ve $q(x)$ cinsinden ifade ediniz.

Çözüm // $u'' + f(x)u = 0$ ... (3) bulalım.

$$y' = u'v + v'u$$

$$y'' = u''v + 2u'v + v''u$$

$$(u''v + 2u'v' + v''u) + p(x)(u'v + v'u) + q(x)uv = 0$$

$$\Rightarrow u''v + (\underbrace{2v' + p(x)v}_{=0})u' + (v'' + p(x)v' + q(x)v)u = 0$$

$$\frac{2dv}{dx} + p(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} + \frac{1}{2}p(x)v = 0 \Rightarrow v = ce^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} \quad \text{.....} \; (4)$$

$$u''v + (v'' + p(x)v' + q(x)v)u = 0 \qquad \text{(v'ye bölersek)}$$

$$\Rightarrow u'' + \underbrace{\left(\frac{v''}{v} + p(x)\frac{v'}{v} + q(x)\right)}_{f(x)}u = 0 \quad \text{olur. Bu ise (3) denklemidir.}$$

$$2v' + p(x)v = 0 \Rightarrow 2v'' + p'(x)v + p(x)v' = 0 \qquad \text{(türev alarak)}$$

$$\Rightarrow v'' = -\frac{(p'(x)v + p(x)v')}{2} \qquad \text{(v'' yü çekerek)}$$

$$\frac{v''}{v} = +p'(x)\frac{1}{2} + \frac{1}{4}p^2(x) \qquad \text{(v ye bölerek)}$$

O halde $u'' + \left(+p'(x)\frac{1}{2} + \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p^2(x) + q(x)\right)u = 0$

$$u'' + \left(\frac{p'(x)}{2} - \frac{1}{4} p^2(x) + q(x) \right) u = 0$$

$$f(x) = \frac{p'(x)}{2} - \frac{1}{4} p^2(x) + q(x) \quad \text{olur.} //$$

Homojen Olmayan Diferansiyel Denklemler

$ay'' + by' + cy = 0$ sabit katsayılı homojen diferansiyel denkleminin bir çözümü bulunabilir. $y'' + \frac{b}{a} y' + \frac{c}{a} y = 0$ denkleminde $\frac{b}{a}$ ve $\frac{c}{a}$ sabitler idi.

Bu bölümde, eşitliğin ikinci tarafı sıfırdan farklı olan denklemlere bakacağız.

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

$$y'' + P(x) y' + q(x) y = g(x)$$

$$L[y_1] = g(x)$$

$$L[y_2] = g(x)$$

$$L[y_1] - L[y_2] = 0 \Rightarrow L[y_1 - y_2] = 0$$

1 - Belirsiz Katsayılar Metodu :

Denklem, $ay'' + by' + cy = g(x)$ formunda olmalıdır.

$$ay'' + by' + cy = g(x) \begin{cases} P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \\ e^{\alpha x} P_n(x) \\ e^{ax} P_n(x) \begin{cases} \cos \beta x \\ \sin \beta x \end{cases} \end{cases} \quad \text{formlarından birisi olur.}$$

$g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_n(x)$ şeklinde yazılırsa, denklemi özel çözümlere ayırabiliriz.

$$L[y] = ay'' + by' + cy = g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_n(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} L[y_1] = g_1(x) \Rightarrow y_{ö_1} \\ L[y_2] = g_2(x) \Rightarrow y_{ö_2} \\ \vdots \\ L[y_n] = g_n(x) \Rightarrow y_{ö_n} \end{array} \right\} y_ö = y_{ö_1} + y_{ö_2} + \dots + y_{ö_n} \quad \text{olur.}$$

Örnek 1// $y'' + 4y = 1 + x + \cos x$

$$y'' + 4y = 1 \Rightarrow y_{ö_1} = \frac{1}{4}$$

$y''+4y=x \Rightarrow y_{ö_2}=\frac{x}{4}$

$y''+4y=\cos x \Rightarrow y_{ö_2}=\frac{1}{3}\cos x$

$y_ö=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}\cos x$ //

Örnek 2// $y''-3y'-4y=3e^{2x}$ denkleminin özel çözümünü bulunuz.

$\cancel{e^{2x}}(\qquad)=3\cancel{e^{2x}}$ olmalıdır. Aksi halde y bulunamaz.

$y_ö(x)=\underset{\downarrow}{A}e^{2x}$ şeklinde özel çözüme sahip olduğunu kabul edelim.

(belirsiz katsayı)

$4Ae^{2x}-6Ae^{2x}-4Ae^{2x}=3e^{2x}$ (denklemde yazarak)

$\Rightarrow -6A\cancel{e^{2x}}=3\cancel{e^{2x}}$

$\Rightarrow A=-\frac{1}{2} \Rightarrow y_ö(x)=-\frac{1}{2}e^{2x}$ //

Örnek 3// $y''-3y'-4y=2\sin x$ denkleminin özel çözümünü bulunuz.

$\cancel{\sin x}(\qquad)=2\cancel{\sin x}$

$y_ö(x)=A\sin x$

$-A\sin x-3A\cos x-4A\sin x=2\sin x$

Bu şekilde bir A nın seçimi mümkün değildir. Ancak,

$-5A\sin x-3A\cos x=2\sin x$

$A=-\frac{5}{2}$ $A=0$ olamaz. Ve,

$y_ö(x)=A\sin x+B\cos x$ yazılırsa,

$\Rightarrow -(A\sin x+B\cos x)-3(A\cos x-B\sin x)-4(A\sin x+B\cos x)=2\sin x$

$\Rightarrow (-A+3B-A)\sin x+(-B-3A-4B)\cos x=2\sin x$

$5/\ -5A+3B=2$

$3/\ -5B-3A=0$

$A=\frac{-5}{17}$ $B=\frac{3}{17}$ $y_ö(x)=\frac{5}{17}\sin x+\frac{3}{17}\cos x$ //

Örnek 4// $y''-3y'-4y=4x^2$ denkleminin özel çözümünü bulunuz.

$y_ö(x)=Ax^2$

$2A-3A.2x-4Ax^2=4x^2$

$\Rightarrow$ $A=0$ $A=-1$ olamaz. $y_ö(x)=Ax^2+Bx+C$ diyelim.

$\Rightarrow 2A-3(2AX+B)-4(AX^2+BX+C)=4X^2$

$\Rightarrow -4AX^2+(-6A-4B)X+2A-3B-4C=4X^2$

$A=-1$

$-6A-4B=0 \Rightarrow -4B=-6 \Rightarrow B=3/2$

$2A-3B-4C=0 \Rightarrow 4C=-2-\frac{9}{2}=-13/2 \Rightarrow C=-\frac{13}{8}$

$yö(x)=-X^2+\frac{3}{2}X-\frac{13}{8}$ olur. //

Örnek 5// $y''-3y'-4y=3Xe^{2X}$

$yö(x)=(AX+B)e^{2X}$ olur. Buradan çözüm yapılır.

Örnek 6// $y''-3y'-4y=e^{-X}$

$yö(x)=Ae^{-X}$

$Ae^{-X}+3Ae^{-X}-4Ae^{-X}=e^{-X} \Rightarrow 0=e^{-X}$ olur ki,

$y''-3y'-4y=0$ çözülürse,

$y=e^{Xr} \Rightarrow e^{Xr}(r^2-3r-4)=0$

$r^2-3r-4=0 \Rightarrow (r+1)(r-4)=0 \Rightarrow r_1=-1 \quad r_2=4$

$y_1=\underline{c_1e^{-X}}+c_2e^{4X}$

Özel çözümün genel formülünü lineer bağımsız yapmak için

$yö(x)=A.\underline{X}.e^{-X}$ yazarız. Yani X ile çarparız. Denklemde yazalım.

$2Ae^{-X}+AXe^{-X}+3(Ae^{-X}-AXe^{-X})-4AXe^{-X}=e^{-X}$

$\Rightarrow -Ae^{-X}=e^{-X}$

$\Rightarrow A=-1 \Rightarrow yö(x)=-Xe^{-X}$ denklemin özel çözümüdür.

$y_G=c_1e^{-X}+c_2e^{4X}-Xe^{-X}$ denklemin özel çözümünün genel formu olur.

Örnek // $y''+4y=Xe^{X}+X\sin 2X$ denkleminin özel çözümünün genel formunu yazınız.

$y''+4y=0 \Rightarrow y_t=\underline{c_1\cos 2X}+c_2\sin 2X$

$yö(x)=(AX+B)e^{X}+(A_1X+B_1)\boxed{X}\cos 2X+(A_2X+B_2)\boxed{X}\sin 2X$

olmalıdır.

$ay''+by'+cy=g(x)$ denkleminin özel çözümünün genel formunun oluşturulması:

	$g(x)$	$y_ö(x)$
(1)	$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$	$x^s(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\dots+A_n)$
(2)	$P_n(x)=e^{\alpha x}$	$x^s(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\dots+A_n)e^{\alpha x}$
(3)	$P_n(x)=e^{\alpha x}\begin{cases}\cos\beta x\\ \sin\beta x\end{cases}$	$x^s\left[(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\dots+A_n)e^{\alpha x}\cos\beta x\right.$ $\left.+(B_0x^n+B_1x^{n-1}+\dots+B_n)e^{\alpha x}\sin\beta x\right]$

Burada $s=0,1,2$ dir. Eğer herhangi bir terim homojen kısmın çözümü ise x veya x^2 ile çarpacağız.

Diyelim ki $ay''+by'+y=g(x)$ denkleminde $g(x)$ yerine (1) olsun. Bu denklemin özel çözümünün genel formunu bulalım.

$y_ö(x)=A_0x^n+\dots+A_n$ denklemde yazalım.

$$a(A_0n(n-1)x^{n-2}+\dots+A_{n-2})+b(A_0nx^{n-1}+A_1(n-1)x^{n-2}+\dots)+c(A_0x^n+\dots+A_n)$$
$$=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$$

$cA_0=a_0$

$bA_0+cA_1=a_1$

Eğer $c=0$ ise $y_ö(x)=\underline{x}(A_0x^n+\dots+A_n)$ olur.

Eğer $c=0$ ve $b=0$ ise $y_ö(x)=\underline{x^2}(A_0x^n+\dots+A_n)$ olur.

Eğer $c=1$ ise $\int ay''+by'=\int P_n(x)$ den,

$ay'+by=xP_n(x)$ olur.

Eğer $c=0$ ve $b=0$ ise $\int ay''=\int P_n(x)$ den,

$ay'=xP_n(x) \Rightarrow ay=x^2P_n(x)$ olur.

Örnek// $y''+y=3\sin 2x+x\cos 2x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y'+y=0 \Rightarrow y_t=c_1\sin x+c_2\cos x$ olur.

Özel çözümün genel formunu yazalım.

$y''+y=3\sin 2x$; $y_{ö_1}(x)=A\sin 2x+B\cos 2x$

$-4(A\sin 2x+B\cos 2x)+(A\sin 2x+B\cos 2x)=3\sin 2x$

$$\left.\begin{aligned}-4A+A&=3\\ -4B+B&=0\end{aligned}\right\}\begin{aligned}A&=-1\\ B&=0\end{aligned} \qquad y_{ö_1}(x)=-\sin 2x$$

$y''+y = X\cos 2X$, $y_{ö_2}(x)=(AX+B)\sin 2X+(A_1X+B_1).\cos 2X$

$\Rightarrow \Big(A(4\cos 2X-4X\sin 2X)+A_1(-4\sin 2X-4X\cos 2X)\Big)+\big(AX\sin 2X+$

$+A_1X\cos 2X\big)-4\big(B\sin 2X+B_1\cos 2X\big)+\big(B\sin 2X+B_1\cos 2X\big)=X\cos 2X$

$\Rightarrow \quad 4A-4B_1+B_1=0 \Rightarrow B_1=0$

$-4A-4B+B=0 \Rightarrow B=0$

$-4A+A=0 \Rightarrow A=0$

$-4A_1+A_1=1 \Rightarrow A_1=-1/3$

$y_{ö_2}(x)=-\frac{1}{3}X\cos 2X \qquad y_ö(x)=-\sin 2X-\frac{1}{3}X\cos 2X$

$y_G = c_1\sin X+c_2\cos X-\sin 2X-\frac{1}{3}X\cos 2X$

Örnek// $u''+w_0^2u=\cos w_0.t$ denk. genel çözüm. bul.

$u''+w_0^2u=0 \Rightarrow y_t=c_1\cos w_0t+c_2\sin w_0t$

$y_ö(t)=(A\sin w_0t+B\cos w_0t).\underline{\underline{t}}$ olur.

Bir önceki örneğin aynısıdır.

Örnek// $y''+4y=X^2+3e^X \quad y(0)=0 \quad y'(0)=2$

$y''+4y=0 \Rightarrow y_t=c_1\cos 2X+c_2\sin 2X$

$y_ö(X)=AX^2+BX+C+De^X$ denklemde yazalım.

$\Rightarrow \quad 2A+De^X+4(AX^2+BX+C)+4De^X=X^2+3e^X$

$4A=1 \Rightarrow A=1/4$

$4B=0 \Rightarrow B=0$

$4C+2A=0 \Rightarrow C=-\frac{1}{8}$

$5D=3 \Rightarrow D=3/5$

$y_G=c_1\cos 2X+c_2\sin 2X+\frac{1}{4}X^2-\frac{1}{8}+\frac{3}{5}e^X$

$y(0)=c_1-\frac{1}{8}+\frac{3}{5}=0 \Rightarrow c_1=\frac{1}{8}-\frac{3}{5}=-\frac{19}{40}$

$y'(x)=-2c_1\sin 2X+2c_2\cos 2X+\frac{1}{2}X+\frac{3}{5}e^X$

$y'(0)=2c_2+\frac{3}{5}=2 \Rightarrow c_2=\frac{7/5}{2}=\frac{7}{10}$

$y_G=-\frac{19}{40}\cos 2X+\frac{7}{10}\sin 2X+\frac{1}{4}X^2-\frac{1}{8}+\frac{3}{5}e^X$ //

2 - Operatör Metodu :

$L[y] = y''+by'+cy = g(x)$ verilsin.

$$=(D^2+bD+c)y = g(x) \qquad \left(D=\frac{d}{dx}\right)$$

$$=(D-r_1)(D-r_2)y = g(x)$$

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2} \qquad r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

$$(D-r_2)y = u(x) \Rightarrow y'-r_2y = u(x) \Rightarrow y(x) = e^{r_2x}\left[\int e^{-r_2x}u(x)\,dx + c_1\right]$$

$$(D-r_1)u = g(x) \Rightarrow u'-r_1u = g(x) \Rightarrow u(x) = e^{r_1x}\left[\int e^{-r_1x}g(x)\,dx + c_2\right]$$

Örnek // $y''-3y'-4y = 3e^{2x}$ denkleminin genel çözümü

$$L[y] = y''-3y'-4y = (D^2-3D-4)y = 3e^{2x}$$

$$=(D-4)\underbrace{(D+1)y}_{u(x)} = \underbrace{3e^{2x}}_{g(x)} \qquad r_1=4 \quad r_2=-1$$

$$(D+1)y = u(x)$$

$$(D-4)u(x) = 3e^{2x}$$

$$u(x) = e^{4x}\left[\int e^{-4x}3e^{2x}\,dx + c_1\right]$$

$$= -\frac{3}{2}e^{2x} + c_1e^{4x}$$

$$(D+1)y = -\frac{3}{2}e^{2x} + c_1e^{4x}$$

$$y(x) = e^{-x}\left[\int\left(-\frac{3}{2}e^{2x} + c_1e^{4x}\right)e^{x}\,dx + c_2\right]$$

$$y(x) = c_2e^{-x} + \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{c_1}{5}e^{4x}\right)$$

$$y(x) = c_2e^{-x} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{c_1}{5}e^{4x}$$

$$\underbrace{y(x)}_{y_G} = \underbrace{c_2e^{-x} + c_3e^{4x}}_{y_t} - \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{y_{\text{ö}}}$$ (2. Örneğin Aynısı)

3- Parametrelerin Değişme Metodu :

$y''+P(x)y'+q(x)y = g(x)$ tipindeki diferansiyel denklemlerin özel çözümlerini bulmak için geliştirilen metoddur.

$y''+P(x)y'+q(x)y = g(x)$ .... (1)

$y''+P(x)y'+q(x)y = 0$ .... (2)

(2) homojen denkleminin çözümü bulunmalıdır.

$$y_t(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \quad --- \quad (3)$$

$$y_ö(x)=u_1(x)\,y_1(x)+u_2(x)\,y_2(x) \quad ---- \quad (4)$$

(1) denkleminin (4) şeklinde özel çözümü olsun.

$$y_ö'(x)=u_1'y_1+u_2'y_2+u_1y_1'+u_2y_2' \quad --- \quad (5)$$

Kabul edelim ki,

$u_1'y_1+u_2'y_2=0$ olsun. --- (6)

$$y_ö'(x)=u_1y_1'+u_2y_2' \quad ---- \quad (7)$$

$$y_ö''(x)=u_1'y_1'+u_2'y_2'+u_1y_1''+u_2y_2'' \quad --- \quad (8)$$

4, 7, 8; (1) de yerine yazılırsa;

$$\Rightarrow u_1'y_1'+u_2'y_2'+u_1y_1''+u_2y_2''+P(x)(u_1y_1'+u_2y_2')+q(x)(u_1y_1+u_2y_2)=g(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(y_1''+P(x)y_1'+q(x)y_1)}_{0}u_1+\underbrace{(y_2''+P(x)y_2'+q(x)y_2)}_{0}u_2+(u_1'y_1'+u_2'y_2')=g(x) \quad --- \quad (9)$$

(homojen denk. çözümü old. için)

$$\Rightarrow u_1'y_1'+u_2'y_2'=g(x) \quad ---- \quad (10)$$

(6) ve (10) denklemini gözönüne alalım.

$u_1'y_1+u_2'y_2=0$

$u_1'y_1+u_2'y_2=g(x)$ bir cebirsel denklem sistemidir.

Bu denklem sisteminin Cramer metoduna göre çözümü;

$$u_1'(x)=\frac{-y_2(x).g(x)}{W(y_1,y_2)}, \quad u_2'(x)=\frac{y_1(x)\,g(x)}{W(y_1,y_2)} \quad ---- \quad (11) \text{ olur.}$$

Eğer (11) deki fonksiyonların integrali alınır, (4) te yerine yazılırsa, (1) denkleminin özel çözümü bulunmuş olur.

$$y_ö(x)=-y_1(x)\int^x\frac{y_2(t)g(t)\,dt}{y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)}+y_2(x)\int\frac{y_1(t)g(t)\,dt}{y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)}$$

1. Örnek// $y''+y=\sec x$ $\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y''+y=0$ homojen kısmını çözelim,

$y_t=c_1\underbrace{\cos x}_{y_1}+c_2\underbrace{\sin x}_{y_2}$ olur.

$y_ö(x)=u_1(x)\cos x+u_2(x)\sin x$

$u_1'(x) = -\frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1,y_2)(x)} = -\frac{\sin x \frac{1}{\cos x}}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}} = -\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow u_1(x) = \ln|\cos x|$

$u_2'(x) = \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1,y_2)(x)} = \frac{\cos x \frac{1}{\cos x}}{1} = 1 \Rightarrow u_2(x) = x$

$y_ö(x) = \cos x \ln|\cos x| + x\sin x$

$y_G = y_t + y_ö = c_1\cos x + c_2\sin x + \cos x \ln|\cos x| + x\sin x$

2.örnek// $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y'' - 2y' + y = 0 \Rightarrow y_t = c_1 e^x + c_2 e^x . x$

$u_1'(x) = \frac{-y_2(x)g(x)}{W(y_1,y_2)(x)} = \frac{-xe^x \frac{e^x}{1+x^2}}{\begin{vmatrix} e^x & e^x . x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix}} = -\frac{x}{1+x^2}$

$u_1(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$u_2'(x) = \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1,y_2)(x)} = \frac{e^x \frac{e^x}{1+x^2}}{e^{2x}} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow u_2(x) = \mathrm{Arctan}\,x$

$y_ö(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$

$= -\frac{1}{2}e^x \ln(1+x^2) + xe^x \arctan x$

$y_G = -\frac{1}{2}e^x\ln(1+x^2) + xe^x \mathrm{Arctan}\,x + c_1e^x + c_2 xe^x$

3.örnek// $x^2y'' + 7xy' + 5y = x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$x^2y'' + 7xy' + 5y = 0$ $\quad z = \ln x$ değişken dönüşümüyle

$y'' + 6y' + 5y = 0$ sabit katsayılı diferansiyel denklem olur.

$\Rightarrow y = e^{rz} \Rightarrow e^{rz}(r^2 + 6r + 5) = 0$

$r^2 + 6r + 5 = 0 \Rightarrow r_1 = -1 \quad r_2 = -5$

$y_t = c_1 e^{-z} + c_2 e^{-5z}$

$y_t = c_1 e^{-\ln x} + c_2 e^{-5\ln x} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^5}$ olur.

$y_ö(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ dersek

$u_1'(x) = -\frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1,y_2)(x)}$ bulmak için denklemimiz

$y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$ formunda olmalıdır. O halde,

$$y''+\frac{7}{x}y'+\frac{5}{x^2}y=\frac{1}{x}$$

$$v_1'(x)=\frac{-x^{-5}\frac{1}{x}}{\begin{vmatrix} x^{-1} & x^{-5} \\ -x^{-2} & -5x^{-6} \end{vmatrix}}=-\frac{x^{-6}}{-4x^{-7}}=\frac{1}{4}x \qquad v_1(x)=\frac{1}{8}x^2$$

$$v_2'(x)=\frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1,y_2)(x)}=\frac{x^{-1}\frac{1}{x}}{-4x^{-7}}=-\frac{1}{4x^{-5}} \Rightarrow v_2(x)=-\frac{1}{24}x^6$$

$$y_ö(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{x^5}\left(-\frac{1}{24}x^6\right)=\underset{(3)}{\frac{x}{8}}-\frac{x}{24}=\frac{x}{12}$$

$$y_G=y_t+y_ö=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^5}+\frac{1}{12}x \quad //$$

4.örnek// Eğer $y''+P(x)y'+q(x)y=g(x)$ diferansiyel denkleminin homojen kısmının bir özel çözümü biliniyorsa, bu diferansiyel denklemin genel çözümü, mertebenin düşürülmesi metoduyla aşağıdaki şekilde bulunur:

Diyelim ki, $y=y_1(x)$ homojen denklemin çözümü olsun.

$$y=y_1(x)v(x) \text{ --- } (1)$$

$$y'=y_1'v+y_1v'$$

$y''=y_1''v+2y_1'v'+y_1v''$ denklemde yazalım,

$$y_1''v+2y_1'v'+y_1v''+P(x)(y_1'v+vy_1')+q(x)y_1v=g(x)$$

$$y_1v''+(2y_1'+P(x)y_1)v'+(\underbrace{y_1''+P(x)y_1'+q(x)y_1}_{=0})v=g(x)$$

$$y_1v''+(2y_1'+P(x)y_1)v'=g(x)$$

v' ne göre birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemdir.

$$\mu(x)=e^{\int\left(\frac{2y_1'}{y_1}+P(x)\right)dx}=y_1^2(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$v'=\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int P(x)dx}\left[\int y_1^2(x)e^{\int P(x)dx}\frac{g(x)}{y_1(x)}dx+c_1\right]$$

$$v'(x)=\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int P(x)dx}\left[\int y_1(x)e^{\int P(x)dx}g(x)dx+c_1\right]$$

$$v(x)=\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int P(x)dx}\int y_1(x)e^{\int P(x)dx}g(x)(dx)^2+\int\frac{c_1}{y_1^2(x)}e^{-\int P(x)dx}dx+c_2$$

Bu değer (1) de yerine konursa genel çözüm elde edilir.

5.Örnek// $x^2y''+7xy'+5y=x$ $y_1(x)=\frac{1}{x}$ verilsin. Bu denklemin genel çözümünü bir önceki örnek ile çözelim.

$$y''+\frac{7}{x}y'+\frac{5}{x^2}y=\frac{1}{x} \qquad y=y_1(x)\,v(x)$$

$$v(x)=\int x^2e^{-7\ln x}\int\frac{1}{x}e^{7\ln x}\cdot\frac{1}{x}(dx)^2+\int c_1\cancel{x}^2e^{-7\ln x}dx+c_2$$

$$\Rightarrow v(x)=\frac{x^2}{x^7}\cdot\frac{x^6}{6}dx+c_1\left(\frac{x^{-4}}{-4}\right)+c_2$$

$$=\frac{x^2}{12}-\frac{c_1}{4}x^{-4}+c_2$$

$$y_1(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{12}-\frac{c_1}{4}x^{-4}+c_2\right)=\frac{x}{12}-\frac{c_1}{4}x^{-5}+c_2x^{-1}$$

$$\frac{c_1}{-4}=c_3 \Rightarrow \underbrace{\frac{x}{12}}_{y_ö(x)}+\underbrace{\frac{c_3}{x^5}+\frac{c_2}{x}}_{y_t(x)}=y_G(x) \text{ olur}$$

$$y_ö(x) \quad y_t(x) = y_G(x)$$

Lineer Diferansiyel Denklemlerin Kuvvet Serileri Cinsinden Çözümü :

1- Kuvvet Serilerinin Yakınsaklığı, Yakınsaklık Yarıçapı

a- önce, $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $a_0\neq 0$ (1)

kuvvet serisini gözönüne alalım. Herhangi bir $x=x_1$ reel değeri için eğer, $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_1^n$ reel sayılar toplamı belli bir sayıya yaklaşıyor ise, o zaman yukarıdaki verilen (1) numaralı kuvvet serisine $x=x_1$ noktasında yakınsaktır denir. Eğer bu toplam belli bir sayıya yaklaşmıyor ise, o zaman seriye $x=x_1$ noktasında ıraksaktır denir.

a_0 sayısının, serinin sıfırdan farklı bir sabit terimi olduğu gözönüne alınır ise, bütün kuvvet serilerinin $x=0$ da yakınsak olduğu açıkça görülür. Aynı şekilde eğer kuvvet serisi $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ şeklinde verilmişse, burada $x=x_0$ noktasında seri yakınsak olur.

$\underbrace{0^0=1}$, $0^1=0$

$$y=\lim_{x\to 0}x^x \Rightarrow \ln y=\lim_{x\to 0}x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}=\frac{\infty}{\infty} \quad \text{L'Hopital 'den}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=0 \Rightarrow \ln y=0 \Rightarrow y=e^0=1 \;//$$

Bir serinin yakınsaklığı genel olarak limit kavramı kullanılarak aşağıdaki şekilde tarif edilir:

a) Eğer X'in herhangi bir değeri için $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(X-X_0)^n$ belli bir değere yaklaşıyorsa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(X-X_0)^n$ serisine X noktasında yakınsaktır denir.

b) Genellikle her kuvvet serisinin bir R yakınsaklık yarıçapı vardır. Burada, yakınsaklık yarıçapı $0 \leqslant R \leqslant \infty$ şeklinde tarif edilen bir sayıdır. ve $|X| < R$ olduğu zaman seri yakınsak ve $|X| > R$ olduğu zaman seri ıraksaktır. Başka bir deyişle $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ kuvvet serisi, sıfır merkezli R yarıçaplı bir aralık içindeki tüm X değerleri için yakınsak, bu aralığın dışındaki X değerleri için ıraksaktır. Aralığın sınır noktalarında, serinin yakınsak veya ıraksak olduğu, her seri için ayrıca belirtilir.

c) Eğer, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(X-X_0)^n|$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(X-X_0)^n$ serisine, X noktasında mutlak yakınsak denir. Kolayca ispatlanır ki, mutlak yakınsak olan bir seri yakınsaktır.

d) Bir kuvvet serisinin mutlak yakınsaklığını belirlemek için en iyi metod, orantı testidir. Eğer X'in herhangi bir değeri için, örneğin $x = X_1$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} X_1^{n+1}}{a_n X_1^n} \right| = |X| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$ ise ve burada;

$L<1$ ise seri yakınsak,

$L>1$ ise seri ıraksak,

$L=1$ için birşey söylenemez.

Örnek // $\sum_{n=0}^{\infty} n(X+1)^n$ kuvvet serisinin, X'in hangi değeri için yakınsak olduğunu bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(X+1)^{n+1}}{n(X+1)^n} = \lim_{n\to\infty} |X+1| \left(\frac{n+1}{n} \right) = |X+1| \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$= |X+1| = L$ $\quad |X+1| < 1 \Rightarrow -1 < X+1 < 1 \Rightarrow -2 < X < 0$ yakınsaklık aralığıdır //

Yakınsaklık yarıçapı $R = 1$ dir. //

$U_0(x) + U_1(x) + \ldots\ldots + U_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ serisi eğer,

$U_n(x) = a_n(x-x_0)^n$, $n=0,1,2,\ldots$ ise kuvvet serisidir.

e) Kuvvet Serilerinin Diferansiyeli :

Kabul edelim ki, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ kuvvet serisi bir $I=\{|x-x_0|<R\}$ aralığı üzerinde tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonunu tanımlasın. Ve bu kuvvet serisi, I aralığı üzerinde mutlak yakınsak olsun. Bu taktirde ;

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ serisinin diferansiyeli, $\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n(x-x_0)^{n-1}$ dir. Ve bu kuvvet serisine I aralığı üzerinde mutlak yakınsaktır ve yakınsadığı fonksiyon $f'(x)$ dir. Bu şekilde devam ederek bir serinin istenildiği kadar diferansiyeli alınabilir ve elde edilecek seriler yine aynı I aralığı üzerinde yakınsak olacaktır.

f) Kuvvet Serilerinin integrali ;

Yukarıdaki $f(x)$ kuvvet serisinin integrali terim terime alınarak görülür ki ;

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ şeklindedir. ki bu seri I aralığı üzerinde bir $g(x)$ fonksiyonuna yakınsar ki $g'(x)=f(x)$ dir ve $g(x_0)=0$ dır.

g) Analitik Fonksiyonlar için Taylor Serisi ;

Kabul edelim ki, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ serisi, pozitif yakınsaklık yarıçaplı bir seri olsun. Bu taktirde, eğer bu serinin tanımladığı fonksiyonu $f(x)$ ile gösterirsek,

$$\frac{f^n(x_0)}{n!} = a_n \qquad (n=0,1,\ldots \quad \text{için}) \qquad \text{olur}$$

Tersine bir $f(x)$ fonksiyonu ve bir x_0 noktası verilsin. Eğer,

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ serisi, pozitif yakınsaklık yarıçapı ise $f(x)$ fonksiyonuna x_0 noktasında analitiktir denir. (Yakınsak bir seri, analitik fonksiyonu belirtir.) Yukarıdaki seriye, $f(x)$ fonksiyonun Taylor serisi denir.

Analitik fonksiyonlara örnekler :

Herhangi bir dereceden bir polinom, her x_0 noktasında analitiktir.

Daha da ötesi, herhangi bir polinomun bir Taylor serisi için yakınsaklık yarıçapı sonsuzdur. örneğin ;

$g(x) = 5x^2+2x+3$ $x_0 = 1$ olsun $g(x)$'i taylor serisine açalım.

$$g(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2$$

$$\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} = a_n \quad n=0,1,2 \qquad \frac{g^{n}(1)}{n!} = a_n \qquad g'(x) = 10x+2$$

$$g''(x) = 10$$

$$g(x) = 10 + 12(x-1) + \frac{10}{2!}(x-1)^2$$

$$= 10 + 12x - 12 + 5x^2 - 10x + 5 = 5x^2 + 2x + 3$$

(Tayler serisi bir fonksiyona polinomla yaklaşmaktır.)

Adî Nokta Civarında Açılım (Çözüm)

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \text{ ------ } (1)$$

$$y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}y = 0$$

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = 0 \text{ ------- } (2)$$

x_0 noktasına (1) denkleni ve dolayısıyla (2) denkleni için bir adî nokta denir, eğer $A(x)$ ve $B(x)$, x_0 civarında yakınsak kuvvet serisi açılımına sahipse. Eğer $A(x)$ veya $B(x)$ böyle bir açılıma sahip değilse x_0 noktasına tekil nokta denir. Özel olarak $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ birer polinom ve hiçbir ortak çarpanı yok ise, eğer $P(x_0) \neq 0$ ise x_0'a bir adî nokta denir ve eğer $P(x) = 0$ ise x_0 bir tekil noktadır.

Örnek // $(1-x^2)y'' + (1-x^2)y' + xy = 0$ denkleminin tekil noktalarını bulunuz.

$P(x) = (1-x^2)$ $Q(x) = (1-x^2)$ $R(x) = x$

$P(x) = 0 \Rightarrow 1 - x_0^2 = 0 \Rightarrow x = \mp 1$ tekil, bunların dışındakiler adî noktadır.

Teorem : Eğer; x_0, (1) denkleminin bir adî noktası ise, (1) denkleminin genel çözümü a_0, a_1 birer sabit olmak üzere,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x) \quad \text{şeklindedir.}$$

ve elde edilecek $y_0(x)$ ve $y_1(x)$ serileri, $|x-x_0| < R$ aralığında yakınsaktır. Buradaki R, adî noktaya en yakın olan tekil noktanın uzaklığıdır.

Örnek// $y''-4y=0$ diferansiyel denkleminin çözümünü kuvvet serileri yardımıyla $X_0=0$ civarında bulunuz.

$P(x)=1 \quad Q(x)=0 \quad R(x)=-4$

$P(x)$ 'i sıfır yapacak çözüm yoktur. Dolayısıyla $x_0=0$ bu denklem için bir adî noktadır.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n . n x^{n-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n . n.(n-1)x^{n-2}-4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$ olur.

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n . n(n-1)x^{n-2}=2a_2X^0+3.2\,a_{\underset{2+1}{3}}X+4.3\,a_{\underset{2+2}{4}}X^2+---$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2}(m+2)(m+1)x^m$$

$n\to n+2$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n-4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n+2}(n+2)(n+1)-4a_n\right)x^n=0$$

$$\Rightarrow a_{n+2}(n+2)(n+1)-4a_n=0 \qquad n\geq 0$$

Tekerrür formülü ya da Regülans bağıntısı denir.

$$a_{n+2}=\frac{4}{(n+2)(n+1)}a_n$$

$a_0=a_0 \quad , \quad a_1=a_1$

$\underline{n=0}$, $a_2=\frac{4}{2}a_0$ $\qquad$ $\underline{n=1}$, $a_3=\frac{4}{3.2}a_1$ $\qquad$ $\underline{n=2}$, $a_4=\frac{4}{4.3}a_2=\frac{\overbrace{4.4}^{2^4}}{\underbrace{4.3.2}_{4!}}.a_0$

$\underline{n=3}$, $a_5=\frac{4}{5.4}a_3=\frac{\overbrace{4.4}^{2^4}}{\underbrace{5.4.3.2}_{5!}}.a_1$

$$a_{2m}=\frac{2^{2m}}{(2m)!}a_0 \quad \to m=1 \text{ için } a_2 \qquad\qquad a_{2m+1}=\frac{2^{2m}}{(2m+1)!}.a_1 \quad m=0 \text{ için } a_1$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=a_0+a_1X+a_2X^2+\dots$$

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{2^2}{2} a_0 x^2 + \frac{2^2}{3!} a_1 x^3 + \frac{2^4}{4!} a_0 x^4 + \frac{2^4}{5!} a_1 x^5$$

$$= a_0\left(1 + \frac{2^2}{2}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 + \cdots \overset{a2n}{+}\right) + a_1\left(x + \frac{2^2}{3!}x^3 + \frac{2^4}{5!}x^5 + \cdots + \frac{2^{2m}}{(2m+1)}x^{2m+1}\right)$$

$$= a_0\left(1 + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots + \frac{(2x)^{2m}}{(2m)!}\right) + \frac{a_1}{2}\left(2x + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(2x)^{2m+1}}{(2m+1)}\right)$$

$$= a_0 \cosh 2x + \frac{a_1}{2} \sinh 2x$$

$y'' - 4y = 0 \Rightarrow y = e^{xr} \Rightarrow e^{xr}(r^2 - 4) = 0 \Rightarrow r = \mp 2$

$y_t = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ $\quad c_1 = c_3 + c_4,\ c_2 = c_3 - c_4$ alırsak

$$= (c_3 + c_4)e^{2x} + (c_3 - c_4)e^{-2x}$$

$$= c_3(e^{2x} + e^{-2x}) + c_4(e^{2x} - e^{-2x})$$

eğer $c_3 = \frac{a_0}{2}$ ve $c_4 = \frac{a_1}{4}$ alınırsa istenen sonuç elde edilir.

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_{m+1}\cdot x^{2m+2}}{a_m \cdot x^{2m}}\right| = x^2 \lim_{m\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(2m+2)!}}{\frac{1}{(2m)!}}\right| = x^2 \lim_{m\to\infty}\frac{1}{(2m+1)(2m+2)} = 0$$

$R = \infty$ olur. (yakınsaklık yarıçapı ∞ olur.)

örnek// $y'' + (x-1)^2 y' + (x^2-1)y = 0$ diferansiyel denkleminin kuvvet serisinin çözümünü $x_0 = 1$ civarında bulunuz.

($x_0 = 1$ noktası bir adi nokta mıdır?)

$x_0 = 1$ adi nokta değildir.

$f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$

$x^2 - 1 = 2(x-1) + (x-1)^2$

$\cong 0 + 2(x-1) + \frac{2}{2}(x-1)^2$

$2(x-1) + (x-1)^2$

$x^2 - 1$, $x_0 = 1$

$2x_0$

$t = x - 1 \Rightarrow dt = dx$

$\frac{d^2y}{dt^2} + t^2 y' + (2t + t^2)y = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ den çözülür.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)(x-1)^{n-2} + (x-1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n \cdot (x-1)^{n-1} + (x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{a_n \cdot n(n-1)(x-1)^{n-2}}_{n \to n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-1)^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+2} = 0$$

$$\Rightarrow 2a_2 + 6a_3(x-1) + \sum_{n=4}^{\infty} \underbrace{a_n \cdot n(n-1)(x-1)^{n-2}}_{n \to n+4} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)(x-1)^{n+2} + 2a_0(x-1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n (x-1)^{n+1}}_{n \to n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+2} = 0$$

$$\Rightarrow 2a_2 + (6a_3 + 2a_0)(x-1) + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+4}(n+4)(n+3)(x-1)^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)(x-1)^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(x-1)^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+2} = 0$$

$$\Rightarrow 2a_2+(6a_3+2a_0)(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_{n+4}(n+4)(n+3)+a_{n+1}(n+1+2)+a_n\right]x^{n+2}=0$$

$$a_2=0 \ , \ 6a_3+2a_0=0 \Rightarrow a_3=-\frac{1}{3}a_0$$

$$a_{n+4}=-\frac{a_{n+1}(n+3)+a_n}{(n+4)(n+3)} \qquad n\geq 0$$

$n=0$ için, $a_4=-\dfrac{3a_1+a_0}{4.3}$,

$n=1$ için, $a_5=-\dfrac{a_1}{5.4}$

$n=2$ için, $a_6=-\dfrac{a_4.5}{6.5}$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+a_3(x-1)^3+\dots$$

$$=a_0+a_1(x-1)+\left(-\frac{1}{3}a_0\right)-\frac{3a_1+a_0}{12}(x-1)^4+\dots$$

$$=a_0\left[1-\frac{1}{3}(x-1)^2-\frac{1}{12}(x-1)^4+\dots\right]+a_1\left[(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^4+\dots\right]$$

Örnek// $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$ denklemine Legendre (Löjandır) denklemi adı verilir. Buradaki α bir sabittir ve de sadece $\alpha>-1$ durumunu inceleyeceğiz. $\alpha<-1$ ise

$\alpha=-(\gamma+1)$ dönüşümüyle $\alpha+1=\gamma$

$\alpha(\alpha+1)=\gamma(\gamma+1)$ olur ki aynı denklemi yine çözmüş oluruz buna gerek yoktur. O halde $\alpha>-1$ için $x_0=0$ civarında bu diferansiyel denklemin kuvvet serisinin çözümünü bulalım.

$x_0=0$ adi noktadır. ($x_0=1$ adi nokta değildir.)

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{\infty}a_n.n\,x^{n-1}+\alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\underbrace{a_n.n(n-1)x^{n-2}}_{n\to n+2}-\sum_{n=2}^{\infty}a_n.n(n-1)x^n-2\sum_{n=1}^{\infty}a_n.n\,x^n+\alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n-\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^n-2\sum_{n=1}^{\infty}a_n n\,x^n+\alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\Rightarrow \underset{n=0}{2a_2}+\underset{n=1}{6a_3x}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n-\sum_{n=2}^{\infty}a_n.n.(n-1)x^n-\underset{n=1}{2a_1x}-\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n+\alpha(\alpha+1)(a_0+a_1x)+$$

$$+\alpha(\alpha+1)\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\Rightarrow 2a_2+\alpha(\alpha+1)a_0+(6a_3-2a_1+\alpha(\alpha+1)a_1)x+\sum_{n=2}^{\infty}\Big(a_{n+2}(n+2)(n+1)-a_n\big(\underbrace{n(n-1)+}_{n^2+n}$$

$$+\,2n-\alpha(\alpha+1)\big)\Big)x^n=0$$

$$a_2=-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}a_0\,,$$

$$a_3=\frac{(2-\alpha(\alpha+1))a_1}{6}\,,\quad a_{n+2}=\frac{(n^2+n)-\alpha(\alpha+1)a_n}{(n+2)(n+1)}=\frac{(n-\alpha)(n+\alpha+1)a_n}{(n+2)(n+1)},\ n\geq 2$$

$$2-\alpha^2-\alpha=-(\alpha^2+\alpha-2)=-(\alpha-1)(\alpha+2)$$

$$\Rightarrow a_3=\frac{(1-\alpha)(\alpha+2)a_1}{6}$$

$n=2$ için, $a_4=\dfrac{(2-\alpha)(3+\alpha)a_2}{4\cdot 3}=\dfrac{(2-\alpha)(3+\alpha)(-\alpha(\alpha+1))}{\underbrace{4\cdot 3\cdot 2}_{4!}}a_0$

$n=3$ için $a_5=\dfrac{(3-\alpha)(4+\alpha)}{5\cdot 4}a_3=\dfrac{(1-\alpha)(3-\alpha)(2+\alpha)(4+\alpha)}{\underbrace{6\cdot 5\cdot 4}_{5!}}a_1$

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$$

$$y=a_0+a_1x-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}x^2+\frac{(1-\alpha)(\alpha+2)}{3!}a_1x^3-\frac{\alpha(\alpha+1)(2-\alpha)(3+\alpha)}{4!}a_1x^4+$$

$$+$$

$$y=a_0\Big(1-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}x^2-\frac{\alpha(\alpha+1)(2-\alpha)(3+\alpha)}{4!}x^4+\cdots+\frac{\alpha(1+\alpha)(2-\alpha)\cdots}{}$$

$$\frac{\cdots(2m-2-\alpha)(3+\alpha)\cdots(2m-1+\alpha)}{(2m)!}x^{2m}+\cdots\Big)+a_1\Big(x+\frac{(1-\alpha)(\alpha+2)}{3!}x^2+$$

$$+\frac{(1-\alpha)(3-\alpha)(2+\alpha)(4+\alpha)}{5!}x^n+\cdots+\frac{(1-\alpha)\cdots(2m-1-\alpha)(2+\alpha)\cdots(2m+\alpha)}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots\Big)$$

$\alpha=n=0$ seçelim, $\alpha=2=n$, $\alpha=3=n$

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

$y(x)=1$ // $\qquad$ $y(x)=1-3x^2$ // $\qquad$ $y(x)=x-\dfrac{5}{3}x^3$ //

$\alpha=n=1\rightarrow y(x)=x$ // $\qquad$ (denklemi sağlar.)

$$\alpha=n=3\Rightarrow (1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$$

$$-(1-x^2)10x-2x(1-5x^2)+12\left(x-\frac{5}{3}x^3\right)=0 \quad \text{bulunur.}$$

7.3.1995
SALI 763

– Düzgün Tekil Nokta Civarında Çözüm –

Eğer x_0 noktası, $y''(x)+A(x)y'(x)+B(x)y(x)=0$ denkleminin bir adi noktası değilse bu noktaya tekil nokta adı verilir. Tekil noktalar kendi aralarında düzgün veya düzgün olmayan tekil nokta olmak üzere aşağıdaki şekilde sınıflandırılır.

Eğer $(x-x_0)A(x)$ ve $(x-x_0)^2B(x)$ x_0'da analitik iseler yani bu fonksiyonlar x_0 civarında pozitif yarıçaplı yakınsak kuvvet serilerine sahip ise x_0'a düzgün tekil nokta denir. Özel olarak $P(x)$, $q(x)$ ve $R(x)$ birer polinom iseler ve eğer $P(x_0)=0$ ve

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{q(x)}{P(x)} \text{ ve } \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$$

limitleri var ise x_0'a düzgün tekil nokta denir. Eğer bir tekil nokta düzgün tekil nokta değilse, o noktaya düzgün olmayan tekil nokta denir.

Örnek// a ve b birer reel sabit olmak üzere gösteriniz ki $(x=0)$ $x_0=0$ noktası $x^2y''+axy'+by=0$ denkleminin bir düzgün tekil noktasıdır.

$P(x)=x^2$ $q(x)=ax$ $R(x)=b$ $\lim_{x\to 0}x\frac{ax}{x^2}=a<\infty$ $\lim_{x\to 0}x^2\frac{b}{x^2}=b<\infty$

limitleri de mevcut olduğundan,

verilen denklemde $x_0=0$ noktası bir düzgün tekil noktadır.

Frobenius Metodu:

Not: Eğer diferansiyel denkleminiz $(x-x_0)^2y''(x)+A(x-x_0)y'(x)+By(x)=0$ tipinde ise $t=x-x_0$ yazıp, verilen diferansiyel denklemi,

(1) ---- $P(x)y''+q(x)y'(x)+R(x)y(x)=0$ formuna dönüşür.

Bir önceki örnekte gördüğümüz diferansiyel denklem, özel olarak Euler denklemi ikinci mertebeden düzgün tekil noktaya sahip denklemler için temel teşkil edilir. Daha genel denklemler ki bunlar düzgün tekil noktaya sahip aşağıdaki teoremle çözümün varlığı ve tekliği garanti edilir.

Teorem: Kabul edelim ki $x=0$ (1) denkleminin bir düzgün tekil noktası olsun. Bu taktirde (1) denkleminin $y(x)=x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ....(2) $a_0 \neq 0$, $x>0$ formunda bir çözümü vardır ve bu seri en azından $0 \leq x < \mathbb{R}$ aralığında yakınsak, buradaki R, x_0'a en yakın tekil noktaya olan uzaklıktır.

Teorem: Kabul edelim ki, $x=0$ (1) denkleminin bir düzgün tekil noktası, ve denklemin <u>indisel denklemi</u> iki reel köke sahip, öyle ki $r_2 \leq r_1$ bu taktirde (1) denklemi y_1 ve y_2 gibi iki lineer bağımsız çözüme sahip ve burada verilen $y_1(x)$, (2) deki gibidir. Ve $y_2(x)$ aşağıdakilerden biri gibidir.

a) Eğer, r_1-r_2 bir tamsayıdan farklı ise $(r_1-r_2 \neq \mathbb{N})$
$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

b) Eğer, $r_1=r_2$ ise $y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

c) Eğer, r_1-r_2 bir pozitif tamsayı ise $(r_1-r_2 = \mathbb{N}^+)$
$$y_2(x) = \underset{\text{sabit sayı}}{\boxed{d^{-1}}}\, y_1(x)\ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \text{ dir.}$$

Yukarıdaki herbir durumda seriler $0 \leq x < \mathbb{R}$ aralığında yakınsak, buradaki R, $x=0$'a en yakın tekil noktaya olan uzaklıktır.

Örnek// $4x^2y''+2x(1-x)y'+6xy=0$ denkleminin $y(0)=3$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,y'(x)=1$ şartlarını sağlayan çözümünü $x=0$ civarında kuvvet serileri yardımıyla bulunuz.

$$P(x_0)=P(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0} x\,\frac{2(1-x)}{x} = 2<\infty \qquad \lim_{x\to 0} x^2\,\frac{6}{4x} = 0<\infty$$

tekilliğin kuvveti

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\boxed{r}},\quad y'=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1},\quad y''=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

$$\Rightarrow 4x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)\cancel{x}x^{n+r-2}+2x(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1}+6x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(4a_n(n+r)(n+r-1)+2a_n(n+r)\right)x^{n+r}+\underset{n\to n-1}{\sum_{n=0}^{\infty}\left(6a_n-2a_n(n+r)\right)x^{n+r+1}}=0$$

$$\Rightarrow (4r(r-1)+2r)a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}2a_n(n+r)(4n+4r-2)+\sum_{n=1}^{\infty}6a_{n-1}-2a_{n-1}(n+r-1))x^{n+r}=0$$

$\Downarrow$

indisel denklemi denir.

$\Downarrow$

$$p(r)=4r^2-4r+2r=2r(2r-1)=0$$

$r_1=\frac{1}{2}$ $r_2=0$ $r_1-r_2=\frac{1}{2}\neq \mathbb{N}$ ... Teorem (2) a şıkkıdır.

$$\Rightarrow (4r(r-1)+2r)a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left[2a_n(n+r)(4n+4r-2)+a_{n-1}(6-2(n+r-1))\right]x^{n+r}=0$$

$$a_n(r)=-\frac{6-2(n+r-1)}{(n+r)(4n+4r-2)}a_{n-1},\quad n\geq 1$$

$$a_n=-\frac{6-2(n-\frac{1}{2})}{(n+\frac{1}{2})(4n+2-2)}a_{n-1},\quad n\geq 1$$

$$a_n=-\frac{7-2n}{2n(2n+1)}a_{n-1},\ n\geq 1$$ ($r_1=1/2$ için tekerrür formülü)

$n=1$, $a_1=-\frac{7-2}{2\cdot(2+1)}a_0$ $n=2$, $a_2=-\frac{7-4}{4(4+1)}a_1=\frac{3}{20}\frac{5}{6}a_0$

$$y_1(x)=x^{1/2}\left(1-\frac{5}{6}x+\frac{15}{120}x^2+\cdots\right)$$

($r_2=0$ için tekerrür formülü)

$$a_n=-\frac{8-2n}{n(4n-2)}a_{n-1}$$

$n=1$, $a_1=-\frac{6}{2}a_0$ $a_2=-\frac{4}{2\cdot 6}a_1=a_0$

$a_3=-\frac{2}{30}a_2=-\frac{2}{30}a_0$ $a_4=a_5=\ldots=0$

$y_2(x)=1-3x+x^2-\frac{1}{15}x^3$ $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$

$$y=c_1x^{1/2}\left(1-\frac{5}{6}x+\frac{15}{120}x^2-\cdots\right)+c_2\left(1-3x+x^2-\frac{1}{15}x^3-\cdots\right)$$

$y(0)=3$ olduğundan, $c_2=3$ dür.

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\left[c_1\frac{1}{2}x^{-1/2}\left(1-\frac{5}{6}x+\frac{15}{120}x^2-\cdots\right)+c_1x^{1/2}\left(-\frac{5}{6}+\frac{15}{60}x-\cdots\right)-9+6x-\frac{3}{5}x^2\right]=1$$

$$\frac{c_1}{2}=1\Rightarrow c_1=2$$

$$y=2x^{1/2}\left(1-\frac{5}{6}x+\frac{15}{120}x^2-\cdots\right)+3\left(1-3x+x^2-\frac{1}{15}x^3\right)$$ //

Örnek // $2xy''+2y'-xy=0$ denkleminin çözümünü kuvvet serileri yardımıyla $x_0=0$ civarında elde ediniz.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \qquad y'=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} \qquad y''=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

$x_0=0$ bir tekil noktadır. Çünkü $P(x_0)=0$ dır. Düzgün tekil noktadır.

$$2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1}-x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+r)x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1}=0$$

$$n\to n-2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+r)x^{n+r-1}-\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n+r-1}=0$$

$$\Rightarrow 2r(r-1)a_0x^{r-1}+2a_1(r+1)rx^r+\sum_{n=2}^{\infty} 2a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}+2a_0rx^{r-1}+$$

$$+2a_1(r+1)x^r+\sum_{n=2}^{\infty} 2a_n(n+r)x^{n+r-1}-\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n+r-1}=0$$

$$\Rightarrow \Big(2r\underbrace{(r-1)+2r}_{\text{indisel denklem}}\Big)a_0x^{r-1}+\big(2r(r+1)+2(r+1)\big)a_1x^r+\sum_{n=2}^{\infty}\big[2a_n(n+r)(n+r-1+1)-a_{n-2}\big]x^{n+r-1}=0$$

②

$$P(r)=2r^2-2r+2r=0 \Rightarrow r_{1,2}=0$$

②; $r_{1,2}=0$ için $\neq 0$ olduğundan ($x\neq 0$ olduğu için) $\underline{a_1=0}$ olmalıdır.

O halde $2a_n(n+r)^2-a_{n-2}=0 \Rightarrow a_n(r)=\dfrac{a_{n-2}}{2(n+r)^2}$

$n\geq 2$, $n=2$ için $a_2=\dfrac{a_0}{2(2+r)^2}$, $n=3$ için $a_3=\dfrac{a_1}{2(3+r)^2}=0$

$$a_1=a_3=a_5=\dots=a_{2n+1}=\dots=0$$

$$a_4=\frac{a_2}{2(4+r)^2}=\frac{a_0}{4r^2(2+r)^2(4+r)^2}$$

$$\overline{y}(x,r)=a_0x^r\left(1+\frac{1}{2(2+r)^2}x^2+\frac{1}{4(2+r)^2(4+r)^2}x^4+\dots\right)$$

$$2x\overline{y}''+2\overline{y}'-x\overline{y}=2a_0r^2x^{r-1}$$

$$2x\left(\frac{\partial\overline{y}}{\partial r}\right)''+2\left(\frac{\partial\overline{y}}{\partial r}\right)'-x\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)=4a_0rx^{r-1}+2a_0r^2x^{r-1}\ln x$$

Eğer denklemde $r=0$ yazılırsa ikinci taraf sıfır olacağı için $\left(\dfrac{\partial\overline{y}}{\partial r}\right)$ verilen denklemin bir çözümü olur.

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial r} = a_0 x^r \ln x \left(1 + \frac{1}{2(2+r)^2} x^2 + \frac{1}{4(2+r)^2(4+r)^2} x^4 + \dots \right) +$$

$$+ a_0 x^r \left(-\frac{2x^2}{2(2+r)^3} - \frac{2(4+r)+2(2+r)}{4(2+r)^3(4+r)^3} x^4 - \dots \right)$$

$a_0 = 1$ alınır ise

$$y_1(x) = \bar{y}(x,r)\Big|_{r=0} = \left(1 + \frac{1}{2^3} x^2 + \frac{1}{2^2 4^3} x^4 + \dots \right)$$

$$y_2(x) = \frac{\partial \bar{y}}{\partial r}\Big|_{r=0} = \left(\ln x \, y_1(x) - \frac{x^2}{2^3} - \frac{6x^4}{2^4 4^3} - \dots \right)$$ ve daha sonra

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ ile denklemin genel çözümü bulunur.

$x \neq 0$ iken yakınsak olacağı aşikar.

Örnek // $4xy'' + (x+1)y' + 2y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü $x_0 = 0$ civarında kuvvet serileri yardımıyla elde ediniz.

$x_0 = 0$ tekil noktadır. (Düzgün tekil noktadır.)

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$\Rightarrow 4x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} + (x+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 4 a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r}}_{n \to n-1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n+r}}_{n \to n-1} = 0$$

$$\Rightarrow 4r(r-1) a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} + a_0 r x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (n+r-1) x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 a_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

$$(4r^2 - 4r + 4) a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n (4n + 4r - 4 + 1) + a_{n-1} (n + r - 1 + 2) \right] x^{n+r-1} = 0$$

$r(4r-3) = 0 \qquad r_1 = 0 \quad r_2 = \frac{3}{4}$

$$a_n = -\frac{(n+r+1) a_{n-1}}{(n+r)(4n+4r-3)}, \quad n \geq 1$$

$r = r_1 = 0$ için $\quad a_n = -\dfrac{(n+1) a_{n-1}}{n(4n-3)}, \quad n \geq 1$

$n = 1$ için

$$a_1 = -\frac{2a_0}{1} \qquad a_2 = -\frac{3a_1}{2.5} = \frac{6}{10} a_0 \qquad a_3 = -\frac{24}{270} a_0$$

$$y_1(x) = 1 - 2x + \frac{6}{10}x^2 - \frac{24}{270}x^3$$

$r = r_2 = \frac{3}{4}$ için $a_n = -\frac{(n+\frac{7}{4})a_{n-1}}{(n+\frac{3}{4})(4n+3-3)} = -\frac{4n+7}{(4n+3)4n}a_{n-1}$

$n=1$ için $a_1 = -\frac{11}{28}a_0$

$n=2$ için $a_2 = -\frac{15}{88}a_1 = \frac{11}{28}\frac{15}{88}a_0$

$$y_2(x) = x^{3/4}\left(1 - \frac{11}{28}x + \frac{11.15}{28.88}x^2 - \cdots\cdots\right)$$

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ 14.3.95 / SALI

Örnek$_{11}$ $2x^2(x-1)y'' + x(3x+1)y' - 2y = 0$ denklemini $x = \infty$ civarında yakınsak olan bir seri ile çözünüz.

$x = \frac{1}{z}$ yazarsak $z = \frac{1}{x}$ için, $z = 0$ da denklemi seriye açarız.

$$dz = -\frac{1}{x^2}dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} \qquad \left\{ \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) = \frac{d^2y}{dz^2}\frac{dz}{dx} \right\}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}\right) = \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^4}\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$2x^2(x-1)\left(\frac{2}{x^3}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^4}\frac{d^2y}{dz^2}\right) + x(3x+1)\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}\right) - 2y = 0$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{4(x-1)}{x} - \frac{3x+1}{x}\right)\frac{dy}{dz} - 2y = 0$ ve $x = \frac{1}{z}$ den,

$\Rightarrow (z - z^2)\frac{d^2y}{dz^2} + (1-5z)\frac{dy}{dz} - 2y = 0$ olur. Bu denklemin,

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r}$ formunda çözüm verdir.

$$2(z-z^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)z^{n+r-2} + (1-5z)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)z^{n+r-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)z^{n+r-1} - \underset{n\to n-1}{2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)z^{n+r}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)z^{n+r-1} - \underset{n\to n-1}{\sum_{n=0}^{\infty} 5a_n(n+r)z^{n+r}}$$

$$-\underset{n\to n-1}{\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n z^{n+r}} = 0$$

$$\Rightarrow 2a_0 r(r-1)z^{r-1} + a_0 r z^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n(2(n+r)(n+r-1)+(n+r)) + a_{n-1}(2(n+r-1)(n+r-2)-5(n+r-1)\right.$$

769

$$\left.-2\right]z^{n+r-1}=0$$

$$\Rightarrow (2r^2-r)a_0 z^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n((n+r)(2n+2r-2+1)) + a_{n-1}((n+r-1)(-2n+2r+4-5)-2\right]z^{n+r-1}=0$$

$2r^2-r=0 \Rightarrow r_1=0 \quad r_2=\frac{1}{2}$ ve

$$(n+r)(2n+2r-1)a_n + ((n+r-1)(-2n+2r-4)-2)a_{n-1}=0 \ , \ n\geq 1$$

$r_1=r=0$ için, $n(2n-1)a_n+((n-1)(-2n-1)-2)a_{n-1}=0$

$n=1$ için, $a_1-2a_0=0 \Rightarrow a_1=2a_0$

$n=2$ için, $6a_2-7a_1=0 \Rightarrow a_2=\frac{7}{6}a_1=\frac{14}{6}a_0$

$r=r_2=\frac{1}{2}$ için, $(n+\frac{1}{2})2n\,a_n+((n-\frac{1}{2})(-2n-2)-2)a_{n-1}=0$

$n=1$ için, $3a_1-3a_0=0 \Rightarrow a_1=a_0$

$10a_2-17a_1=0 \Rightarrow a_2=\frac{17}{11}a_0$

$r=r_1=0$ için eğer $a_0=1$ alınırsa,

$$y_1(z)=\left(1+2z+\frac{14}{6}z^2+\cdots\right)$$

$r=r_2=\frac{1}{2}$ için eğer $a_0=1$ alınırsa,

$$y_2(z)=z^{1/2}\left(1+z+\frac{17}{11}z^2+\cdots\right)$$

O halde $y_1(x)=1+\frac{2}{x}+\frac{14}{6x^2}+\cdots$

$$y_2(x)=\frac{1}{x^{1/2}}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{17}{11x^2}+\cdots\right.$$

$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ de yukarıdaki değerler yazılırsa çözüm elde edilir. Ve elde edilen seri $|x|>1$ için yakınsaktır.

Örnek// $x^2y''+xy'+(x^2-\alpha^2)y=0$ denkleminin $x=0$ civarında genel çözümünü bulunuz.

$x=0$ düzgün tekil noktadır. Ve bir çözüme sahiptir.

$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}$ formunda çözümü vardır ve $x\neq 0$ için denklemin çözümü verilen form ile yapılır. Denklem,

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}+(x^2-\alpha^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

olur.

$$\Rightarrow a_0 r(r-1)x^r + a_1 r(r+1)x^{r+1} + a_0 r x^r + a_1(r+1)x^{r+1} - \alpha^2(a_0 + a_1 x)x^r$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n\left((n+r)(n+r-1)+(n+r)-\alpha^2\right) + a_{n-2}\right]x^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(r(r-1)+r-\alpha^2\right)}\, a_0 x^r + \underbrace{\left(r(r+1)+(r+1)+(r+1)-\alpha^2\right)}_{(r+1)^2-\alpha^2 = 2\alpha+1 \neq 0} a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n\left((n+r)^2-\alpha^2\right)+a_{n-2}\right)x^{n+r} = 0$$

$r^2-\alpha^2=0 \quad r_1=\alpha, \ r_2=-\alpha$

Önce kabul edelim ki, $\alpha \notin \mathbb{N}$ olmasın. O halde

$a_1 = 0$ almalıyız ($\alpha \neq -\frac{1}{2}$ alınır ise)

$\left((n+r)^2-\alpha^2\right)a_n + a_{n-2} = 0$, $n \geq 2$ elde ederiz.

$r = r_1 = \alpha$ için $\left((n+\alpha)^2-\alpha^2\right)a_n - a_{n-2} = 0$

$n(n+2\alpha)a_n + a_{n-2} = 0$ yine tekerrür formülünden açıkça

görülür ki, $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2n+1} = 0$ olur.

$n=2$ için, $2(2+2\alpha)a_2 = a_0 \Rightarrow a_2 = \dfrac{-a_0}{2^2(1+\alpha)}$

$n=4$ için, $4(4+2\alpha)a_4 = a_2 \Rightarrow a_4 = \dfrac{-a_2}{2^3(2+\alpha)} = \dfrac{a_0}{2^5(1+\alpha)(2+\alpha)}$

ve böyle devam edilirse,

$$y_1(x) = a_0 x^{\alpha}\left[1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\alpha} + \left(\frac{x}{2}\right)^4 \frac{1}{2!}\frac{1}{(1+\alpha)(2+\alpha)} - \left(\frac{x}{2}\right)^6 \frac{1}{3!}\frac{1}{(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)} + \dots\right]$$

diğer yandan bu çözüm gama fonksiyonu vasıtasıyla daha açık şekilde

ifade edilebilir.

$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$, $x>0$ öyle ki $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ($x>0$ için)

$\Gamma(1) = 1$ ve $x = n$ (bir tamsayı ise) $\Gamma(n+1) = n!$ dir.

$\alpha > 0$ için $\Gamma(\alpha+n+1) = \Gamma(\alpha+1)(1+\alpha)(2+\alpha)$

$\Gamma(\alpha+2) = \Gamma(\alpha+1+1) = (\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)$

ve yukarıdaki $y_1(x)$ çözümünde a_0, $1/2^{\alpha}\left[\Gamma(\alpha+1)\right]$ alınır ise

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}\frac{1}{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)} = J_{\alpha}(x)$$

elde edilir ki, buna α. dereceden birinci cins Bessel fonksiyonu

adı verilir.

$r = r_2 = -\alpha$ ise $\quad a_n = -\frac{1}{(n-2\alpha)n} a_{n-2}$; $n = 2, 3, \ldots$

Bu taktirde kolayca gösterilebilir ki, $y_2(x) = J_{-\alpha}(x)$ dir. O halde Bessel denkleminin α 'nın bir tamsayı olmaması durumunda genel çözümü,

$$y(x) = c_1 J_\alpha(x) + c_2 J_{-\alpha}(x)$$

olarak bulunur.

İndis denkleminin kökleri arasındaki fark tamsayı ise

Örnek // $\quad (x-x^2)y'' - 3y' + 2y = 0 \quad , \quad x_0 = 0$

$x(1-x) = 0$, 0 ve 1 düzgün tekil noktadır.

$J_\alpha(0) = 0 \quad J_{-\alpha}(0)$ sınırsız olarak büyür. Sonlu değil, sonsuzdur.

· $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$

$$(x-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow -\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}}_{n \to n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1}$$
$$+ 2\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}}_{n \to n-1} = 0$$

$$a_0 r(r-1)x^{r-1} - 3ra_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n(n+r)(n+r-1-3) + a_{n-1}(2-(n+r)(n+r-1))\right] x^{n+r-1} = 0$$

$a_0[r^2-4r]x^{r-1}$, $r^2 - 4r = 0$, $r_1 = 0$, $r_2 = 4$

$$(n+r)(n+r-4)a_n + a_{n-1}[2-(n+r)(n+r-1)] = 0$$

$r = r_2 = 4$ için $\quad (n+4)n.a_n + a_{n-1}(\underbrace{2-(n+4)(n+5)}_{-(n+2)(n+5)}) = 0$

$$a_n = \frac{(n+2)(n+5)}{n(4+n)} a_{n-1}$$

$n=1$ için, $a_1 = \frac{18}{5} a_0 \qquad n=2$ için, $a_2 = \frac{28}{12} a_1 = \frac{42}{5} a_0$

$$a_n = \frac{(n+r)(n+r-1)-2}{(n+r)(n+r-4)} a_{n-1}$$

$n=1$ için, $a_1 = \frac{(1+r)r-2}{(r+1)(r-3)} a_0$

$n=2$ için, $a_2 = \frac{(2+r)(r+1)-2}{(r+2)(r-2)} a_1 = \frac{(1+r)r-2}{(r+1)(r-3)} \cdot \frac{(2+r)(r+1)-2}{(r+2)(r-2)} a_0$

$$\bar{y}(x,r)=a_0x^r\left(1+\frac{(1+r)r-2}{(r+1)(r-3)}x+\frac{(1+r)r-2\,(2+r)(1+r)-2}{(r+2)(r-2)(r+1)(r-3)}x^2+\dots\right)$$

$$(x-x^2)\bar{y}''-3\bar{y}'+2\bar{y}=a_0r(r-4)x^{r-1}$$ a_0 yerine $b_0 r$ alınır ise

$$y_1(x)=\bar{y}(x,r)\Big|_{r=0}=1+\frac{18}{5}x+\frac{42}{5}x^2+\dots$$

$$(x-x^2)\bar{y}''-3\bar{y}'+2\bar{y}=b_0.r^2(r-4)x^{r-1}$$

$$(x-x^2)\left(\frac{\partial\bar{y}}{\partial r}\right)''-3\left(\frac{\partial\bar{y}}{\partial r}\right)'+2\left(\frac{\partial\bar{y}}{\partial r}\right)=b_0(3r^2-4r)x^{r-1}+b_0r^2(r-4)x^{r-1}\ln x$$

$$\bar{y}(x,r)=b_0x^r\underbrace{\left(r+\frac{(1+r)r^2-2r}{(r+1)(r-3)}x+\frac{((1+r)r^2-2)((2+r)(1+r)-2)}{(r+2)(r-2)}x^2+\dots\right)}_{\alpha}$$

$$\frac{\partial\bar{y}(x,r)}{\partial r}=b_0x^r\ln x(\alpha)+b_0x^r\left(1+\dots\right.$$

$$y_2(x)=\frac{\partial\bar{y}(x,r)}{\partial r}\Big|_{r=0}=b_0\ln x\,y_1(x)+\dots$$

örnek// $xy''+(x-1)y'-y=0$, $x_0=0$ civarında çözünüz.

$P(x_0)=0$, $P(0)=0$

$$\lim_{x\to0}x\frac{(x-1)}{x}=\lim_{x\to0}x-1=-1\qquad\lim_{x\to0}x^2\frac{(-1)}{x}=\lim_{x\to0}-x=0$$

$x_0=0$ noktası verilen denklem için düzgün tekil noktadır.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

$$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r}}_{n\to n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}}_{n\to n-1}=0$$

$$\Rightarrow a_0r(r-1)x^{r-1}-a_0rx^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n((n+r)(n+r-1)-1)+a_{n-1}(n+r-2)\right]x^{n+r-1}=0$$

$$\Rightarrow a_0(r^2-2r)x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n(n+r)(n+r-2)+a_{n-1}(n+r-2)\right]x^{n+r-1}=0$$

$r^2-2r=0$ $\quad r_1=0$ $\quad r_2=2$ $\qquad a_n(n+r)(n+r-2)+a_{n-1}(n+r-2)=0$

$$a_n=-\frac{1}{n+r}a_{n-1}\ ,\ n\geq1$$

$n=1$ için , $a_1=-\frac{1}{1+r}a_0$ $\qquad n=2$ için $a_2=-\frac{1}{2+r}a_1=\frac{1}{(1+r)(2+r)}a_0$

$$\bar{y}(x,r) = a_0 x^r \left(1 - \frac{1}{(1+r)} x + \frac{1}{(1+r)(2+r)} x^2 + \frac{1}{(1+r)(2+r)(3+r)} x^3 + \cdots \right)$$

$$y_1(x) = \bar{y}(x,r)\Big|_{r=2} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + \cdots$$

$$y_2(x) = \bar{y}(x,r)\Big|_{r=0} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3 + \cdots = e^{-x}$$

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

örnek // $x^2y'' + 3xy' + (1+x)y = 0$, $x_0 = 0$ civarında seriye açınız.

$P(x_0) = 0 \quad \lim\limits_{x\to 0} x \dfrac{3x}{x^2} = 3 \quad \lim\limits_{x\to 0} x^2 \dfrac{(1+x)}{x^2} = 1$

$x_0 = 0$ noktası verilen denklem için düzgün tekil noktadır.

$y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ formunda bir çözüm vardır.

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} + 3x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} + (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n(n+r)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1}}_{n\to n-1} = 0$$

$$\Rightarrow a_0 r(r-1)x^r + 3a_0 r x^r + a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n (n+r)(n+r-1) + 3\ (n+r) + 1 + a_{n-1}\right] x^{n+r} = 0$$

$r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r+2)^2 = 0, \ r_1 = r_2 = -1$

$$\left(a_n\left[(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1\right] + a_{n-1}\right) x^{n+r} = 0$$

$$a_n = -\frac{1}{(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1} a_{n-1} \qquad a_n [n + r(n+r-1) + 3 + 1 + a_{n-1}) = 0$$

$$n = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{(1+r)(r) + 3r + 1} a_0 \qquad a_n = -\frac{1}{n+r+3(n+r)} a_{n-1}$$

$$n = 1 \quad a_1 = -\frac{1}{(r+4)(r+1)} a_0 \qquad n = 2 \quad a_2 = -\frac{1}{(r+5)(r+2)} a_1$$

$$= \frac{1}{(r+1)(r+2)(r+4)(r+5)} a_0$$

$$\bar{y}(x,r) = a_0 x^r \left(1 - \frac{1}{(r+4)(r+1)} x + \frac{1}{\quad} x^2 + \cdots \right)$$

$$\bar{y} = (x,r)\Big|_{r=0} = y_1(x)$$

$$\frac{\partial \bar{y}(x,r)}{\partial r}\Big|_{r=0} = y_2(x)$$

örnek// $(x^2-x)y''+3y'-2y = x+\frac{3}{x^2}$

$(x^2-x)y''+3y'-2y=0$

$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ şeklinde çözümü vardır.

0 ve 1 tekil noktadır. 0 ve 1 arasında $\overset{\text{çözüm.}}{\text{yakınsaktır.}}$

$$(x^2-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+3\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1}-2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}+3\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r}$$

$n\to n-1$

$$-2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}=0$$

$n\to n-1$

$$\Rightarrow -a_0 r(r-1)x^{r-1}+3a_0 r x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n(n+r)(-(n+r-1)+3)+a_{n-1}(n+r-1)(n+r-2)-2\Big]x^{n+r-1}=0$$

$\Rightarrow -r^2+r+3r=0 \Rightarrow r(-r+4)=0 \quad r_1=0,\ r_2=4$

$a_n(n+r)(-n-r+4)+a_{n-1}\left[(n+r)^2-2(n+r)-(n+r)+2-2\right]=0 \quad n\geq 1$

$a_n(n-r+4)+a_{n-1}(n+r-3)=0$

$$a_n=\frac{-(n+r-3)}{-n-r+4}a_{n-1}$$

$n=1$ için, $a_1=-\frac{(r-2)}{3-r}a_0$

$n=2$ için, $a_2=-\frac{(r-1)}{2-r}=\frac{(r-2)(r-1)}{(3-r)(2-r)}a_0$

$n=3$ için, $a_3=\frac{r}{1-r}a_2=\frac{-r(r-2)(r-1)}{(3-r)(2-r)(1-r)}a_0$

$n=4$ için, $a_4=\frac{-1+r}{-r}a_3=-\frac{(1+r)\cancel{r}(r-2)(r-1)}{(3-r)(2-r)(1-r)\cancel{r}}a_0 \qquad \underline{\underline{a_0=1}}$

$$y_1(x)=\bar{y}(x,r)\Big|_{r=4}=x^4\left(1-\frac{2}{3}x+\frac{6}{3}x^2-4x^3 - \dots\right)$$

$$y_2(x)=\bar{y}(x,r)\Big|_{r=0}=\left(1+\frac{2}{3}x+\frac{2}{6}x^2\right)$$

$$=x+\frac{3}{x^2}$$

$$(x^2-x)\bar{y}''(x,r)+3\bar{y}'(x,r)-2\bar{y}(x,r)=a_0 x^{r-1} r(-r+4)$$

$$\bar{y}(x,r)=x^r a_0\left(1-\frac{r-2}{3-r}x+\frac{(r-2)(r-1)}{(3-r)(2-r)}x^2+\dots\right)$$

$$a_0 x^{r-1} r(-r+4) = x \Rightarrow r=2$$

$$a_0 x . 2(-2+4) = x \Rightarrow a_0 = \frac{1}{4}$$

$$a_n = \frac{-(n-1)}{-n+2} a_{n-1}$$

$n=1$ için, $a_1 = \frac{0}{-1} a_0 = 0$ sıfır çözüm vardır.

$$y_{öç_1} = x^2 \left(\frac{1}{4} + \underbrace{a_1 x + ...}_{0\ ---} \right) = \frac{x^2}{4}$$

$(x^2-x)\frac{1}{2} + 3\frac{2x}{4} - 2\frac{x^2}{4} = -\frac{x}{2} + \frac{3x}{2} = x$ olur.

$$a_0 x^{r-1} r(-r+4) = \frac{3}{x^2} \Rightarrow r=-1 \quad , a_0 = -\frac{3}{5}$$

$$a_n = -\frac{(n-4)}{(-n+5)} a_{n-1}$$

$n=1$ için, $a_1 = \frac{3}{4} a_0 = -\frac{9}{20}$

$n=2$ için, $a_2 = \frac{2}{3} a_1 = -\frac{18}{60}$

$n=3$ için, $a_3 = \frac{1}{2} a_2 = -\frac{18}{120}$

$n=4$ için, $a_4 = 0$ $, ---, a_5 = 0, a_6 = 0, --$

$$y_{öç_2} = x^{-1}\left(-\frac{3}{5} - \frac{9}{20}x - \frac{18}{60}x^2 - \frac{18}{120}x^3\right)$$

örnek// $y' - \sin xy = 0$ $x_0 = 0$ civarında seriye açınız.

$x_0=0$ noktası tekil nokta değildir. Denklemin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formunda bir çözümü vardır.

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n . n . x^{n-1} - \sin xy = 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ----$$

$$\sin xy = xy - \frac{x^3y^3}{3!} + \frac{x^5y^5}{5!} - ----$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n . n . x^{n-1} - \left(xy - \frac{x^3y^3}{3!} + \frac{x^5y^5}{5!} ---- \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} - \left(x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \frac{x^3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^3}{3!} + \frac{x^5 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^5}{5!} ----.. \right) = 0$$

$n \to n+1$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n - \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - \frac{x^3(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots)^3}{3!} + \approx 0\Big) = 0$$
$$n \to n-1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n - \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} x^n - \frac{x^3(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots)^3}{3!}\Big) = 0$$

$n=0$ için, $a_1=0$

$n=1$ için, $2a_2x - a_0x = 0 \Rightarrow x(2a_2-a_0)=0$, $a_2 = \frac{a_0}{2}$

$n=2$ için, $3a_3x^2 - a_1x^2 = 0 \Rightarrow 3a_3 = a_1 \Rightarrow a_3 = \frac{a_1}{3} = 0$

$n=3$ için, $4a_4x^3 - a_2x^3 - \frac{a_0^3}{6}x^3 = 0$

$$\Rightarrow x^3(4a_4 - a_2 - \frac{a_0^3}{6}) = 0$$

$$\Rightarrow a_4 = \frac{a_2 + \frac{a_0^3}{6}}{4} = \frac{\frac{a_0}{2} + \frac{a_0^3}{6}}{4}$$

$$y = \Big(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}{4}x^4 + \dots\Big) \quad //$$

22.3.95/Çarşamba.

Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler

n. mertebeden lineer diferansiyel denklemin,

$$P_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + P_n(x)y = G(x) \quad \text{---} \quad (1)$$

şeklinde olduğunu daha önceden görmüştük. Eğer; $P_0, P_1, \dots, P_n$ ve G'nin $\alpha<x<\beta$ aralığında sürekli, reel değerli fonksiyonlar olduğunu kabul edersek ve (1) denklemini $P_0(x)$ ile bölersek

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{P_1(x)}{P_0(x)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{P_n(x)}{P_0(x)}y = \frac{G(x)}{P_0(x)}$$

$$L[y] = \frac{d^n y}{dx^n} + q_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + q_n(x)y = g(x) \quad \text{-----} \quad (2)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem: Eğer, $q_1(x), q_2(x), \dots, q_n(x)$ ve $g(x)$; $\alpha<x<\beta$ aralığında sürekli ise bu taktirde (2) denklemini ve

$$y(x_0) = y_0 \ , \ y'(x_0) = y_0' , \dots , y^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1}$$

başlangıç şartını sağlayan $y=\phi(x)$ $(\alpha<x<\beta)$ fonksiyonu vardır ve tektir.

Teorem 2 : Eğer; $q_1(x), q_2(x), \ldots, q_n(x)$, $\alpha < x < \beta$ aralığında sürekli, 777 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de (2) nin homojen kısmının çözümleri ve $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x)$ en az bir noktada sıfırdan farklı ise bu taktirde (2)'nin homojen kısmının her çözümü $y_1, y_2, \ldots, y_n$'in çözümlerinin bir lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir.

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

olarak tanımlanır.

Alıştırmalar

1– Eğer y_1 ve y_2; $y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$ denkleminin çözümleri ise; $W(y_1, y_2)(x) = c\,e^{-\int P(x)dx}$ şeklinde yazılabileceğini göstermiştik. Eğer $y_1, y_2, \ldots, y_n$'ler; $y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + q_n(x)y = 0$ denkleminin çözümleri ise gösterilebilir ki,

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) = c\,e^{-\int^{x} q_n(t)dt}$$

dir. Bu sonuç, Abel özdeşliği olarak bilinir.

Çözüm//

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W'(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x)$$

İspatı $n=3$ için yapalım.

$$W'(y_1, y_2, y_3)(x) = \underbrace{\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix}$$

$$W'(y_1, y_2, y_3)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix}$$

$$y''' + q_1(x)y'' + q_2(x)y' + q_3(x)y = 0$$

$$y''' = -q_1(x)y'' - q_2(x)y' - q_3(x)y$$

$$w'(y_1,y_2,y_3)(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ -q_1y_1''-q_2y_1'-q_3y_1 & -q_1y_2''-q_2y_2'-q_3y_2 & -q_1y_3''-q_2y_3'-q_3y_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ -q_1y_1'' & -q_1y_2'' & -q_1y_3'' \end{vmatrix} = -q_1 w(y_1,y_2,y_3)(x)$$

$$w'(y_1,y_2,y_3)(x) = -q_1 w(y_1,y_2,y_3)(x)$$

$$w(y_1,y_2,y_3)(x) = c e^{-\int^x q_1(t)dt}$$

2- Gösteriniz ki, aşağıda verilen fonksiyonlar, verilen denklemlerin çözümleridir ve çözümlerin Wronskien'ini hesaplayınız.

$y'''+y'=0$ $\quad 1, \cos x, \sin x$

$y_2(x)=\cos x$, $y_2'(x)=-\sin x$, $y_2''(x)=-\cos x$ $\quad y_2'''(x)=\sin x$

$y_1(x)=1$ $\quad y_1'(x)=0$

$y_3(x)=\sin x$ $\quad y_3'(x)=\cos x$ $\quad y_3''(x)=-\sin x$ $\quad y_3'''(x)=-\cos x$

$$w(1,\cos x,\sin x)=\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}=1$$

3- Eğer $y_1(x)$, $y'''(x)+q_1(x)y''(x)+q_2(x)y'+q_3(x)y=0$ denkleminin bir özel çözümü ise, gösteriniz ki,

$y=y_1(x)v(x)$ yazılır ise yukarıdaki denklem, v' için

$y_1v'''+(3y_1'+q_1y_1)v''+(3y_1''+2q_1y_1'+q_2y_1)v'=0$

denklemine dönüşür.

Çözüm// $y=y_1v \Rightarrow y'=y_1'v+v'y_1$

$y''=y_1''v+2v'y_1'+v''y_1$

$y'''=y_1'''v+y_1''v'+2y_1''v'+2y_1v''+y_1'v''+y_1v'''$

$y'''=y_1'''v+3y_1''v'+3y_1'v''+y_1v'''$

$\Rightarrow y_1'''v+3y_1''v'+3y_1'v''+y_1v'''+q_1(x)(y_1''v+2v'y_1'+v''y_1)+$

$+q_2(x)(y_1'v+v'y_1)+q_3(x)(y_1v)=0$

$$y_1v'''+(3y_1'+q_1y_1)v''+(3y_1''+2q_1y_1'+q_2y_1)v'+\underbrace{(y_1'''+q_1y_1''+q_2y_1'+q_3y_1)}_{=0}v=0$$

Bu metodu kullanarak $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$ denklemini

çözünüz. $y_1(x) = x \quad , x > 0$

$0 - 0 + 6x - 6x = 0$ olur.

$y = y_1(x)v(x) = x\,v(x)$ değişken dönüşümüyle ,

$$y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0$$

$$xv''' + \underbrace{\left(3 - \frac{3}{x}x\right)}_{0}v'' + \underbrace{\left(-\frac{6}{x} + \frac{6}{x^2}x\right)}_{0}v' = 0$$

$$xv''' = 0 \Rightarrow v''' = 0$$

$$v'' = c \,,\; v' = cx + c_1 \,,\; v = c\frac{x^2}{2} + c_1x + c_3$$

$$y = y_1(x)v(x)$$

$$= x(c_4x^2 + c_1x + c_3) = c_4x^3 + c_1x^2 + c_3x$$

4 – $x^2(x+3)y''' - 3x(x+2)y'' + 6(1+x)y' - 6y = 0 \quad x > 0, \quad y_1(x) = x^2 \; y_2(x) = x^3$

$$y''' - \frac{3}{x}(x+2)y'' + \frac{6(1+x)}{x^2(x+3)}y' - \frac{6}{x^2(x+3)}y = 0$$

$$x^2v''' + \left(3.2x - \frac{3x^2(x+2)}{x}\right)v'' + \left(6 - \underbrace{\frac{12(x+2)x}{x(x+3)} + \frac{6(1+x)}{x^2(x+3)}x^2}_{0}\right)v' = 0$$

$$x^2v''' + \left(\frac{6x(x+3) - 3x(x+2)}{x+3}\right)v'' + 0 = 0$$

$$v''' + \left(\frac{3x+12}{x+3}\right)v'' = 0$$

$$v''(x) = ce^{-3\ln(x+3) - 6\ln x + 6\ln(x+3)}$$

$$v''(x) = c\frac{1}{(x+3)^3}(x+3)^6\frac{1}{x^6} = c\frac{(x+3)^3}{x^6}$$

$$v'(x) = c\int\left(\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4} + \frac{3}{x^5} + \frac{1}{x^6}\right)dx$$

$$v(x) = c\left(-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{5x^5}\right)$$

$y(x) = y_1(x).v(x)$'den ;

$$y(x) = x^2c\left(-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{3}{4x^4} - \frac{1}{5x^5}\right) = c\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \frac{3}{4x^2} - \frac{1}{5x^3}\right) //$$

Sabit Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemler

$(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ 'ler birer sabit olmak üzere,

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

denklemini gözönüne alalım. Yine ikinci mertebe denklemlerde olduğu gibi, (1) denkleminin $y = e^{xr}$ formunda bir çözüme sahip olduğunu kabul edelim. Bu taktirde,

$$L[e^{xr}] = e^{xr}(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n) = 0 = e^{xr} z(r)$$

şeklinde yazılabilir. Açıkça görüleceği gibi, $z(r)=0$ 'ın kökleri ki bunun için $L[e^{xr}]=0$ olur. Dolayısıyla $y=e^{xr}$ de (1) denkleminin çözümü olarak kabul edilir. $z(r)$ 'ye karakteristik polinom, $z(r)=0$ ifadesine de karakteristik denklem adı verilir.

Diğer yandan,

$$z(r) = a_0 (r-r_1)(r-r_2)\ldots(r-r_n)$$

şeklinde yazılabileceği için $z(r)=0$ 'ın köklerinin durumuna göre, diferansiyel denklemin çözümü, aynı ikinci mertebe denklemlerde olduğu gibi üç ayrı şekilde incelenebilir.

i - Kökler reel ve farklı ise, bu taktirde (1) in çözümü,

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \ldots + c_n e^{r_n x}$$ formundadır.

1. örnek // $y''' - 4y'' + y' + 6 = 0$

$y = e^{xr} \Rightarrow e^{xr}(r^3 - 4r^2 + r + 6) = 0$

$r^3 - 4r^2 + r + 6 = 0$, $r_1 = -1$ köktür.

$$\begin{array}{l|l} r^3-4r^2+r+6 & r+1 \\ \hline -r^3 \mp r^2 & r^2-5r+6 \\ \quad -5r^2+r & \\ \quad \pm 5r^2 \pm 5r & \\ \qquad 6r+6 & \\ \qquad -6r \mp 6 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$r^3 - 4r^2 + r + 6 = (r+1)(r^2 - 5r + 6)$$
$$= (r+1)(r-2)(r-3)$$

$r_1 = -1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$

Dolayısıyla genel çözüm,

$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ // olur.

ii- Kökler kompleks ise, bunlar kompleks eslenik durumundadır. yani; $\lambda+i\mu$ kök ise $\lambda-i\mu$'de köktür. Çünkü denklemin katsayıları reeldir. O halde diferansiyel denklemin genel çözümü, aynı ikinci mertebeden denklemlerde olduğu gibi,

$e^{(\lambda+i\mu)x}$ yerine $e^{\lambda x}\cos\mu x$, $e^{\lambda x}\sin\mu x$ yazılarak bulunur.

2. örnek // $y^{IV}-y=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y^{IV}-y=0 \Rightarrow y=e^{xr} \Rightarrow e^{xr}(r^4-1)=0 \Rightarrow (r^2-1)(r^2+1)=0$$

$r^2-1=0 \Rightarrow r_1=1$, $r_2=-1$ //

$r^2+1=0 \Rightarrow$ kökler komplekstir. //

$r^2+1=0 \Rightarrow r_3=-i$, $r_4=i$ olur. Buradan,

$$y(x)=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$$ olur. //

ili- Kökler çakısık ise, $r=r_1$ kökü $z(r)=0$ denkleminin, ($s\leq n$ olmak üzere) s defa kökü ise bu taktirde,

$$e^{r_1x},\ xe^{r_1x},\ x^2e^{r_1x},\ \ldots,\ x^{s-1}e^{r_1x}$$

(1) denkleminin çözümleridir.

Eğer $\lambda+i\mu$ karakteristik polinomun s defa kökü ise bunun kompleks esi olan $\lambda-i\mu$ de karakteristik polinomun s defa köküdür. Bunlara karsılık $2s$ tane kompleks değerli çözüm vardır. Yine ikinci mertebe denklemlerde olduğu gibi bu kompleks değerli fonksiyon yerine,

$$e^{(\lambda+i\mu)x},\ xe^{(\lambda+i\mu)x},\ x^2e^{(\lambda+i\mu)x},\ \ldots,\ x^{s-1}e^{(\lambda+i\mu)x}$$

bunların reel ve kompleks kısımlarını çözüm olarak yazabiliriz. Yine bu fonksiyonların lineer bağımsız olacakları açıktır.

$$e^{\lambda x}\cos\mu x,\ e^{\lambda x}\sin\mu x,\ xe^{\lambda x}\cos\mu x,\ xe^{\lambda x}\sin\mu x,\ \ldots,\ x^{s-1}e^{\lambda x}\cos\mu x,\ x^{s-1}e^{\lambda x}\sin\mu x$$

verilen denklemin çözümleridir. O halde,

(1) denkleminin genel çözümü,

3. Örnek // $y^{IV}+2y''+y=0$

$y=e^{xr} \Rightarrow e^{xr}(r^4+2r^2+1)=0$

$(r^2+1)(r^2+1)=0 \Rightarrow (r^2+1)^2=0 \Rightarrow r_1=i \, , \, r_2=-i$

$y=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3 x\cos x+c_4 x\sin x$

4. Örnek // $y^{IV}+10y''+9y=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y=e^{xr} \Rightarrow e^{xr}(r^4+10r^2+9)=0 \Rightarrow r^4+10r^2+9=0$

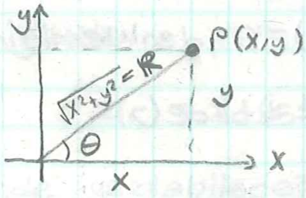
$(r^2+1)(r^2+9)=0 \Rightarrow r^2=-1 \, , \, r^2=-9$

$r_1=-i \, , \, r_2=i \, , \, r_3=3i \, , \, r_4=-3i$

$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3\cos 3x+c_4\sin 3x$

Kompleks Sayıların Kutupsal (Açısal) Gösterimi

$z=x+iy$ verilsin.



$\cos\theta=\frac{x}{R} \qquad \sin\theta=\frac{y}{R}$

$R=(x^2+y^2)^{1/2}$

$z=x+iy=R(\cos\theta+i\sin\theta)=Re^{i\theta}$

$\Rightarrow z=Re^{i\theta} \Rightarrow z^n=R^n e^{i\theta n}=R^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=R^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n$

$y^{IV}+y=0$ denkleminin $y=e^{xr}$ formunda çözümü vardır.

$e^{xr}(r^4+1)=0 \Rightarrow r^4+1=0 \Rightarrow r^4=-1 \Rightarrow r=(-1)^4$

$z=-1 \Rightarrow \cos(\pi+2k\pi)+i\sin(\pi+2k\pi)$

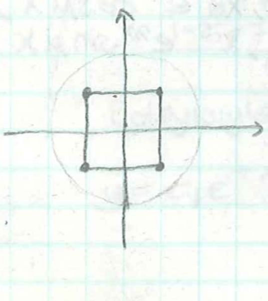
$r=(-1)^4 \Rightarrow (\cos(\pi+2k\pi)+i\sin(\pi+2k\pi))^{1/4}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}$

$k=0$, $\pi/4$ olur.

225°, 3. bölge (−)

$r_1=\frac{1}{\sqrt2}(1+i)$ $k=0$ için, $\qquad r_3=-\frac{1}{\sqrt2}(1+i)$ $k=3$ için

$r_2=\frac{1}{\sqrt2}(-1+i)$ $k=1$ için, $\qquad$ 1 ile 4, 2 ile 3 birbirinin eşleniği



$y=e^{1/\sqrt2 \cdot x}(c_1\cos\frac{1}{\sqrt2}x+c_2\sin\frac{1}{\sqrt2}x)+$

$+e^{-1/\sqrt2 \cdot x}(c_3\cos\frac{1}{\sqrt2}x+c_4\sin\frac{1}{\sqrt2}x)$ //

Örnek // $y^{IV} - 8y' = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y = e^{xr} \Rightarrow r^4 - 8r = 0 \Rightarrow r(r^3 - 8) = 0$

$r_1 = 0 , r^3 = 8 \Rightarrow (r^3 - 8) = (r-2)(r+2)^2 = 0$

$y = \overset{\rightarrow r_1=0}{c_1} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} + c_4 x e^{-2x}$ olur. //

Belirsiz Katsayılar Metodu

İkinci mertebeden diferansiyel denklemlerde olduğu gibi yüksek mertebeli diferansiyel denklemlerde de bu metodun uygulanabilmesi için denklemimiz sabit katsayılı ve ikinci taraftaki fonksiyonların, ikinci mertebe diferansiyel denklemlerde belirttiğimiz gibi olması gerekir.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n . y = g(x)$$

Örnek // $y''' - 4y' = x + 3\cos x + e^{-2x}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y''' - 4y' = 0 \Rightarrow y = e^{xr}$

$e^{xr}(r^3 - 4r) = 0 \Rightarrow r(r^2 - 4) = 0 \; , \; r_1 = 0 , r_2 = 2 , r_3 = -2$

$y_t = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$

$y_{ö1} = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$

$\Rightarrow -8Ax - 4B = \boxed{x} \Rightarrow B = 0 \; , \; A = -\frac{1}{8}$

$y_{ö1} = -\frac{1}{8} x^2$ //

$y_{ö2} = A_1 \cos x + B_1 \sin x$

$\Rightarrow -A_1 \sin x - B_1 \cos x - 4(-A_1 \sin x + B_1 \cos x) = \boxed{3\cos x}$

$-5B_1 \cos x = 3\cos x \Rightarrow B_1 = -\frac{3}{5} \quad A_1 = 0$

$y_{ö2} = -\frac{3}{5} \sin x$ //

$y_{ö3} = Axe^{-2x} \quad y' = Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x} \quad y''' = 12Ae^{-2x} - 8Axe^{-2x}$

$\Rightarrow 12Ae^{-2x} - 8Axe^{-2x} - 4(Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x}) = e^{-2x}$

$A = \frac{1}{8} \quad y_{ö3} = \frac{x}{8} e^{-2x}$

$y_g = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} - \frac{1}{8} x^2 - \frac{3}{5} \sin x + \frac{1}{8} x e^{-2x}$ //

2. örnek // $y'''-3y''+2y'=x+e^x$, $y(0)=1$, $y'(0)=-\frac{1}{4}$, $y''(0)=-\frac{3}{2}$

$y'''-3y''+2y'=0 \Rightarrow y=e^{xr}$

$e^{xr}(r^3-3r^2+2r)=0 \Rightarrow r^3-3r^2+2r=0$

$r(r^2-3r+2)=0$, $r(r-1)(r-2)=0$, $r_1=0, r_2=1, r_3=2$

$y_t=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}$

$y_{ö_1}=(Ax+B)x$ $\quad y''=-6A+4Ax+2B=\boxed{x}$

$A=\frac{1}{4}$ $\quad -6A+2B=0$

$-\frac{6}{4}+2B=0$ $\quad B=3/4$

$y_{ö_1}=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x$ //

$y_{ö_2}=A_1xe^x$ $\quad y'=A_1e^x+A_1xe^x$ $\quad y''=2A_1e^x+A_1xe^x$

$\underline{3A_1e^x}+A_1xe^x-\underline{6A_1e^x}-3A_1xe^x+\underline{2A_1e^x}+2A_1xe^x=\boxed{e^x}$

$A_1=-1$ $\quad y_{ö_2}=-xe^x$ //

$y=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}+\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x-xe^x$

$y(0)=c_1+c_2+c_3=1$

$y'=c_2e^x+2c_3e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}-e^x-xe^x$

$y'(0)=c_2+2c_3+\frac{3}{4}-1=-1/4$, $c_2+2c_3=0$

$y''=c_2e^x+4c_3e^{2x}+\frac{1}{2}-2e^x-xe^x$

$y''(0)=c_2+4c_3+\frac{1}{2}-2=-3/2$, $c_2+4c_3=0$

$c_2+4c_3=0$
$c_2+2c_3=0$ $\quad c_2=c_3=0$ $\quad c_1=1$
$c_1+c_2+c_3=0$

$y_G=1+\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x-xe^x$ //

Parametrelerin Değişme Metodu

$L[y]=y^{(n)}+q_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+q_{n-1}(x)y'+q_n(x)y=g(x)$ --- (1)

denkleminin özel çözümünü bulmak için geliştirilmiş bu metod, ikinci mertebe denklemlerin özel çözümünü bulmak için geliştirilmiş olan parametrelerin değişme metodunun genişletilmiş şeklidir. Yine aynı şekilde, bu metodun uygulanabilmesi için denklemin homojen kısmının çözümlenebilmesi gerekir.

Kabul edelim ki; $y_1, y_2, \dots, y_n$ (1) denkleminin homojen kısmının temel çözüm kümeleri olsun. Bu taktirde,

$$y_{tç}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \;\text{-----}\; (2)$$

$$y_{öç}(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x) + \dots + u_n(x) y_n(x) \;\text{----}\; (3)$$

şeklinde denklemin bir özel çözüme sahip olduğunu kabul ederiz. Denklemde açıkça görüleceği üzere n tane bilinmeyen fonksiyon vardır. O halde n tane şartın bilinmesi gerekir.

$$y_{öç}'(x) = u_1 y_1' + u_2 y_2' + \dots + u_n y_n' + u_1' y_1 + u_2' y_2 + \dots + u_n' y_n$$

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 + \dots + u_n' y_n = 0$$

$$y_{öç}''(x) = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + \dots + u_n y_n'' + u_1' y_1' + u_2' y_2' + \dots + u_n' y_n'$$

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' + \dots + u_n' y_n' = 0$$

ve böyle devam edersek $(n-1)$ tane denklem buluruz ki,

$(n-1)$. inci denklemimiz, $u_1' y_1^{(n-2)} + u_2' y_2^{(n-2)} + \dots + u_n' y_n^{(n-2)} = 0$

$$u_1 y_1^{(n-2)} + u_2 y_2^{(n-2)} + \dots + u_n y_n^{(n-2)}$$

$$u_1 y_1^{(n-1)} + u_2 y_2^{(n-1)} + \dots + u_n y_n^{(n-1)}$$

$$\Rightarrow u_1 y_1^{(n)} + \dots + u_n y_n^{(n)} + u_1' y_1^{(n-1)} + \dots + u_n' y_n^{(n-1)} + q_1(x)\left(u_1 y_1^{(n-1)} + \dots + u_n y_n^{(n-1)}\right) +$$
$$+ \dots + q_n(x)\left(u_1 y_1 + \dots + u_n y_n\right) = g(x)$$

$$\Rightarrow u_1\left(y_1^{(n)} + \underbrace{q_1(x)\, y_1^{(n-1)} + \dots}_{0}\right) + \dots + u_1' y_1^{(n-1)} + \dots + u_n' y_n^{(n-1)} = g(x)$$

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 + \dots + u_n' y_n = 0$$

$$u_1' y_1' + u_2' y_2 + \dots + u_n' y_n' = 0 \qquad \begin{matrix} n \text{ denklem} \\ n \text{ bilinmeyen} \end{matrix}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \dots + u_n' y_n^{(n-1)} = 0$$

Örnek // $y^{IV} + 10y'' + 9y = -\sin x$

$y^{IV} + 10y'' + 9y = 0 \qquad y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 \sin 3x + c_4 \cos 3x$

$y_{öç} = u_1(x) \sin x + u_2(x) \cos x + u_3(x) \sin 3x + u_4(x) \cos 3x$

Buradan sonra türev alırsak,

$$u_1'\sin x + u_2'\cos x + u_3'\sin 3x + u_4'\cos 3x = 0$$

$$u_1'\cos x - u_2'\sin x + 3u_3'\cos 3x - 3u_4'\sin 3x = 0$$

$$-u_1'\sin x - u_2'\cos x - 9u_3'\sin 3x - 9u_4'\cos 3x = 0$$

$$-u_1'\cos x + u_2'\sin x - 27u_3'\cos 3x + 27u_4'\sin 3x = -\sin x$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin 3x & \cos 3x \\ \cos x & -\sin x & 3\cos 3x & -3\sin 3x \\ -\sin x & -\cos x & -9\sin 3x & -9\cos 3x \\ -\cos x & \sin x & -27\cos 3x & 27\sin 3x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -8\sin 3x & -8\cos 3x \\ 0 & 0 & -24\cos 3x & 24\sin 3x \\ -\sin x & -\cos x & -9\sin 3x & -9\cos 3x \\ -\cos x & \sin x & -27\cos 3x & 27\sin 3x \end{vmatrix} = 192 \quad //$$

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin 3x & \cos 3x \\ 0 & -\sin x & 3\cos 3x & -\sin 3x \\ 0 & -\cos x & -9\sin 3x & -9\cos 3x \\ -\sin x & \sin x & -27\cos 3x & 27\sin 3x \end{vmatrix}}{192}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -8\sin 3x & -8\cos 3x \\ 0 & -\sin x & 3\cos 3x & -3\sin 3x \\ 0 & -\cos x & -9\sin 3x & -9\cos 3x \\ -\sin x & \sin x & -27\cos 3x & 27\sin 3x \end{vmatrix}}{192}$$

$$u_1'(x) = \frac{\sin x\left(\sin x \begin{vmatrix} -8\sin 3x & -8\cos 3x \\ -9\sin 3x & -9\cos 3x \end{vmatrix} - \cos x \begin{vmatrix} -8\sin 3x & -8\cos 3x \\ 3\cos 3x & -3\sin 3x \end{vmatrix}\right)}{192}$$

$$u_1'(x) = -\sin x\cos x\,\frac{24}{192} \Rightarrow u_1'(x) = -\frac{1}{8}\sin x\cos x \qquad u_1(x) = \frac{1}{16}\cos^2 x \quad //$$

$$u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \sin x & 0 & \sin 3x & \cos 3x \\ \cos x & 0 & 3\cos 3x & -3\sin 3x \\ -\sin x & 0 & -9\sin 3x & -9\cos 3x \\ -\cos x & -\sin x & -27\cos 3x & 27\sin 3x \end{vmatrix}}{192}$$

$$u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -8\sin 3x & -8\cos 3x \\ 0 & 0 & -24\cos 3x & 24\sin 3x \\ -\sin x & 0 & -9\sin 3x & -9\cos 3x \\ -\cos x & -\sin x & -27\cos 3x & 27\sin 3x \end{vmatrix}}{192} = \frac{24.8.\sin^2 x}{\cancel{24}.8}$$

$$u_2'(x) = \sin^2 x \qquad u_2(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$u_3'(x)=\frac{\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 0 & \cos 3x \\ \cos x & -\sin x & 0 & -3\sin 3x \\ -\sin x & -\cos x & 0 & -9\cos 3x \\ -\cos x & \sin x & -\sin x & 27\sin 3x \end{vmatrix}}{192}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -0 & -8\cos 3x \\ 0 & 0 & -\sin x & 24\sin 3x \\ -\sin x & -\cos x & 0 & -9\cos 3x \\ -\cos x & \sin x & -\sin x & 27\sin 3x \end{vmatrix}}{192}$$

$$=+(\sin^2 x+\cos^2 x)(-8\sin x\cos 3x) \Rightarrow u_3'(x)=-\frac{\sin x\cos 3x}{24}$$

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' + \dots + y_n u_n' = 0$$

$$y_1' u_1' + y_2' u_2' + \dots + y_n' u_n' = 0$$

$$y_1'' u_1' + y_2'' u_2' + \dots + y_n'' u_n' = 0$$

$$\vdots$$

$$y_1^{(n-1)} u_1' + \dots\dots + y_n^{(n-1)} u_n' = g$$ ise bu denklem sisteminin çözümü;

$$u_m'(x) = \frac{g(x) W_m(x)}{W(x)} \quad , \quad m = 1, 2, \dots, n$$

$$W_m(x) = \left| \begin{array}{ccccc} & & m & & \\ y_1 & \dots & 0 & \dots & y_n \\ y_1' & & 0 & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & 1 & \dots & y_n^{(n-1)} \end{array} \right|$$

$$y_ö(x) = \sum_{m=1}^{n} y_m(x) \int^{x} \frac{g(t) W_m(t)}{W(t)} \, dt$$

Örnek // $y''' + y' = \tan x \quad , \quad 0 < x < \pi/2$

$$y''' + y' = 0 \quad , \quad y = e^{xr} \Rightarrow e^{xr}(r^3 + r) = 0 \quad , \quad r^3 + r = 0$$

$$r_1 = 0 \; , \; r_2 = i \; , \; r_3 = -i$$

$$y_t = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$$

$$y_{ö_q} = u_1(x) + u_2(x) \cos x + u_3(x) \sin x$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1$$

$$u_1'(x) = \frac{\tan x \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 1 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}}{1} = \tan x$$

$$u_1(x) = -\ln \cos x$$

$$u_2'(x) = \frac{\tan x \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & 1 & -\sin x \end{vmatrix}}{1} = -\tan x \cos x = -\sin x$$

$$u_2(x) = \cos x$$

$$U_3'(x) = \frac{\tan x \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & 1 \end{vmatrix}}{1} = -\tan x \sin x = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$U_3(x) = -\sin x + \ln(\sec x + \tan x)$$

$$y_{öq} = -\ln\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x \ln(\sec x + \tan x)$$

$$= -\ln\cos x + \sin x \ln(\sec x + \tan x)$$

örnek // $y''' - 3y'' + 3y' - y = \dfrac{e^x}{x^2}$

$$y = e^{xr} \Rightarrow e^{xr}(r^3 - 3r^2 + 3r - 1) = 0$$

$$(r-1)^3 = 0 \quad r - 1 = 0 \quad r_1 = r_2 = r_3 = 1$$

$$y_t = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

$$y_{öq} = u_1(x) e^x + u_2(x) x e^x + u_3(x) x^2 e^x$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2 e^x \\ e^x & e^x(x+1) & 2xe^x + e^x x^2 \\ e^x & e^x(x+1) + e^x & 2e^x + e^x . 2x + e^x x^2 + 2xe^x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^x & xe^x & e^x x^2 \\ e^x & (x+1)e^x & e^x(2x + x^2) \\ e^x & (x+2)e^x & e^x(2 + 4x + x^2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -e^x & -2xe^x \\ 0 & -e^x & -2xe^x - 2e^x \\ e^x & 2e^x + xe^x & 2e^x + 4xe^x + x^2e^x \end{vmatrix}$$

$$W(x) = e^{3x} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2x \\ 0 & -1 & -2x - 2 \\ 1 & x+2 & x^2 + 4x + 2 \end{vmatrix} = 2e^{3x}$$

$$u_1'(x) = \frac{e^x . \frac{1}{x^2} \begin{vmatrix} 0 & xe^x & -- \\ 0 & e^x(1+x) & -- \\ 1 & -- & -- \end{vmatrix}}{2e^{3x}} = \frac{\frac{e^x}{x^2} e^{2x}(2x^2 + 2x^3 - x^3 - x)}{2e^{3x}}$$

$$u_1'(x) = \frac{1 + 2x - \frac{1}{x}}{2} = \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2x}$$

$$u_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln x$$

$$u_2'(x) = \frac{\frac{e^x}{x^2} \begin{vmatrix} e^x & 0 & x^2 e^x \\ e^x & 0 & (2x + x^2)e^x \\ e^x & 1 & (2 + 4x + x^2)e^x \end{vmatrix}}{2e^{3x}} = \frac{1}{2x^2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & 2x + x^2 \\ 1 & 1 & 2 + 4x + x^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{x}$$

$U_2(x)=-\ln x$

$$U_3'(x)=\frac{\frac{e^x}{x^2}\cdot\begin{vmatrix} e^x & xe^x & 0 \\ e^x & e^x(x+1) & 0 \\ e^x & e^x(x+2) & 1 \end{vmatrix}}{2e^{3x}}=\frac{1}{2x^2}\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & 1+x & 0 \\ 1 & 2+x & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2x^2}$$

$$U_3'(x)=\frac{1}{2x^2} \qquad U_3(x)=-\frac{1}{2x}$$

Daha sonra bu değerler yö(x) de yerine yazılarak sonuca ulaşılır.

Laplace Transformu

Diferansiyel denklemleri çözmek için geliştirilmiş metodlardan birisi de integral transformudur. Eğer bu transformdaki çekirdek fonksiyonu yerine $K(s,t)=e^{-st}$ alınırsa, bu transforma Laplace transformu denir.

$$f(s)=\int k(s,t)f(t)dt$$

Bu transform özellikle ikinci yanlı denklemlerde, eğer fonksiyonun süreksiz olduğu noktalar varsa, diğer metodlarla çözemediğimiz birçok problemi bu transform vasıtasıyla kolayca çözeriz.

a- Laplace transformunun tanımı

Kabul edelim ki, $t\geqslant 0$ için $f(t)$ verilsin, ve bu fonksiyon biraz sonra ifade edeceğimiz şartları sağlasın. Bu taktirde $f(t)$ nin Laplace transformu

$$L\{f(t)\}=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \quad ----(1)$$

şeklinde tanımlanır.

b- f fonksiyonuna $a\leq t\leq b$ aralığında parçalı süreklidir denir. Eğer bu aralık, sonlu sayıda noktalara ayrılabilir yani $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$ öyle ki

1- $t_{i-1}<t<t_i$ aralığında f sürekli, bu alt aralıkların her birinde f sağ ve sol limitlere sahip, öyle ki, yine bu limitler

o alt aralıkta kalıyorsa; bir diğer ifadeyle f'e $a \leq t \leq b$ aralığında parçalı süreklidir denir. Eğer o, sonlu sayıda süreksiz nokta dışında sürekli ise.

Teorem 1.: Eğer $t \geqslant a$ için f parçalı sürekli, $t \geqslant M$ (M bir sabit) olduğunda $|f(t)| \leq g(t)$ ve $\int_M^\infty g(t)dt$ yakınsak ise $\int_a^\infty f(t)dt$ yakınsaktır. Eğer $t \geqslant M$ için $f(t) > g(t)$ ve $\int_M^\infty g(t)dt$ ıraksak ise $\int_a^\infty f(t)dt$ de ıraksaktır. (Aynı teorem bir sayfa ileride)

Not// Eğer f, $a \leq t \leq b$ aralığında parçalı sürekli ise gösterilebilir ki, $\int_a^b f(t)dt < \infty$ yani yakınsaktır. 12.4.95/SALI

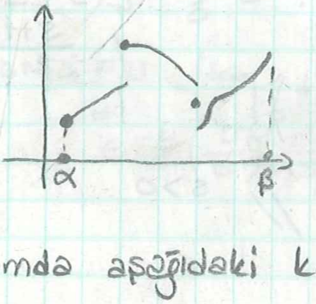
$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(t)dt \quad \text{(Bak Analiz III. Bölüm. 3.1)}$$

Eğer $f(t) = e^{ct}$, $t \geqslant 0$

$$\int_0^\infty e^{ct}dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{ct}dt = \lim_{A\to\infty} \left(\frac{1}{c}(e^{cA}-1)\right), \; c<0 \quad \text{(ıraksaktır.)}$$

$$= -\frac{1}{c} \qquad c=0 \text{ ise sonsuzdur.}$$

Tanım: Bir f(t) fonksiyonuna $\alpha \leq t \leq \beta$ aralığında parçalı süreklidir denir. Eğer bu aralığın her alt açık aralığında f sürekli ve bu açık alt aralıkların her birinde f sonlu limite sahip öyle ki, bu limitte adı geçen alt aralıktadır. Bir diğer ifadeyle f'e, $\alpha \leq t \leq \beta$ aralığında parçalı süreklidir denir. Eğer bu fonksiyon bu aralıkta sonlu sayıda sıçrama şeklindeki süreksiz noktalar hariç her yerde sürekli ise.



Yine elementer fonksiyonlar vasıtasıyla eğer f kolayca integre edilemiyorsa $\int_a^\infty f(t)dt$ nin yakınsaklık tanımını uygulamak zordur. Bu durumda aşağıdaki karşılaştırma teoremi kullanılır.

Not// Bir fonksiyonun parçalı sürekli olması onun $\int_a^\infty f(t)dt$ şeklindeki genelleştirilmiş integrasyonunun yakınsak olması için yeterli değildir.

1. Teorem: Eğer $f \geq a$ için $f(t)$ parçalı sürekli ve $t \geq M$ olduğunda (M: pozitif bir sabit) $|f(t)| \leq g(t)$ ve $\int_M^\infty g(t)dt$ yakınsak ise $\int_a^\infty f(t)dt$ de yakınsaktır.

Eğer $f(t) \geq g(t) \geq 0$; $t \geq M$ için ve $\int_M^\infty g(t)dt$ ıraksak ise $\int_a^\infty f(t)dt$ de ıraksaktır. (ispat Analiz dersinde vardır.)

2. Teorem: Kabul edelim ki

1- Herhangi bir A pozitif sayısı için $0 \leq t \leq A$ aralığında f parçalı süreklidir.

2- K, a ve M reel sabitler öyle ki (K ve M pozitif) $t \geq M$ olduğunda $|f(t)| \leq Ke^{at}$ olsun. Bu taktirde

$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ ifadesi olan f'in Laplace transformu $s>a$ için mevcuttur.

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt<\infty$$

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \underbrace{\int_0^A e^{-st}f(t)dt}_{\text{yakınsak.}} + \int_A^\infty e^{-st}f(t)dt$$

Örnek// $f(t)=1$, $t \geq 0$, $F(s)=?$

$$L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}1.dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s} //, \quad s>0$$

Örnek// $f(t)=e^{at}$, $t \geq 0$

$$L\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \frac{1}{-s+a} e^{-(s-a)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a} //, \quad s>a \text{ için.}$$

$f(t)=\sin at$

Örnek// $L\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st}\sin at\, dt = im\int_0^\infty e^{-st}e^{iat}dt$

$e^{iat} = \cos at + i\sin at$

$$= im\left(\frac{1}{ia-s}e^{-(s-ia)t}\right)\Big|_0^\infty$$

$$= im\left(\frac{1}{\underset{(s+ia)}{s-ia}}\right) = \frac{a}{s^2+a^2} // \quad s>0$$

$$\frac{s+ia}{s^2+a^2}$$

$L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$ //

Kabul edelim ki, f_1'in Laplace transformu $s>a_1$ için var ve f_2'nin Laplace transformu $s>a_2$ için var olsun. Bu taktirde $s>\max(a_1,a_2)$ için bu fonksiyonların herhangi lineer kombinasyonunun

Laplace transformu vardır.

$$L\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\} = \int_0^\infty (c_1 f_1(t)+c_2f_2(t))e^{-st}dt$$

$$= c_1\int_0^\infty \underbrace{e^{-st}f_1(t)dt}_{s_1>a_1} + c_2\int_0^\infty \underbrace{e^{-st}f_2(t)dt}_{s_2>a_2} \Bigg\} \text{ yakınsaktır. } s>\max(a_1,a_2)$$

$$L\{e^{at}\cos bt\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\cos bt = Re\int_0^\infty e^{-st}e^{at}e^{ibt}dt$$

$$= Re\left[-\frac{1}{\underset{(s-a+ib)}{(s-a-ib)}} e^{-(s-a-ib)t}\Big|_0^\infty\right] = -\frac{Re\,1}{s-a-ib}(e^0-1)$$

$$= \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \quad // \qquad \frac{\overset{Re}{(s-a)}+\overset{im}{ib}}{(s-a)^2+b^2}$$

$\Gamma(p+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^p\,dx$ integrali sonsuzda $\forall p$ için yakınsaktır. Eğer $p<0$ ise bu integral genelleştirilmiş Integraldir. (has olmayan integral.) Bununla birlikte ispat edilebilir ki $p>-1$ için $x=0$ da integralimiz yakınsaktır.

a- Gösteriniz ki $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$ dir.

$$= \int_0^\infty e^{-x}x^p\,dx = -e^{-x}x^p\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$$

$$= p\Gamma(p) \quad //$$

b- Gösteriniz ki, $\Gamma(1)=1$ dir.

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$$

c- Eğer p pozitif tamsayı ise $\Gamma(n+1)=n!$ dir.

a- $p>-1$ olmak üzere t^p nin Laplace dönüşümünü gözönüne alalım.

$$L\{t^p\} = \int_0^\infty e^{-st}t^p\,dt \qquad \Big\{\ \Gamma(p+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^p\,dx$$

$st=u$ ise, integralimiz ; $\qquad \Big\{\ dt=\frac{du}{s}$

$$\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^p\frac{du}{s} = \frac{1}{s^{p+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^p\,du$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \text{ dir } //$$

b- $p\in Z^+$ ise gösteriniz ki $L\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s>0$

c- $L\{t^{-1/2}\} = \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{2}{\sqrt{s}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \left(\frac{\pi}{s}\right)^{1/2}$ //

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad //$$

d- $L\{t^{1/2}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$, $s>0$

Başlangıç Değer Problemlerinin Çözümü

Bu bölümde bir lineer diferansiyel (sabit katsayılı) denkleminin Laplace transformuyla nasıl çözülebildiğini gösterelim.

3. Teorem : Kabul edelim ki, $0 \leq t \leq A$ aralığında f sürekli f' parçalı sürekli olsun. Ve yine kabul edelim ki $t \geq M$ için $|f(t)| < Ke^{at}$ olacak şekilde K, a sabitleri bulunsun. Bu taktirde $s>a$ için $L\{f'(t)\}$ vardır ve $L\{f'(t)\} = s L\{f(t)\} - f(0)$ dır.

İspat// Teoremi ispat etmek için $\int_0^A e^{-st} f'(t)dt$ integralini gözönüne alalım. Kabul edelim ki, $t_1, t_2, \ldots, t_n$; $f'(t)$ nin sürekli olmadığı noktalar olsun. Bu taktirde,

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} e^{-st} f'(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t)dt + \ldots + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f'(t)dt$$

$$= e^{-st} f(t)\Big|^{t_1} + s\int^{t_1} e^{-st} f(t)dt + e^{-st} f(t)\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t) + \ldots + e^{-st} f(t)\Big|_{t_n}^{A} + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f(t)dt$$

$$= -f(0) + s\int_0^A e^{-st} f(t)dt$$

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f'(t)dt = \lim_{A\to\infty} (-f(0)) + s\int_0^A e^{-st} f(t)dt$$

$$L\{f'(t)\} = -f(0) + s L\{f(t)\}$$

Yine aynı şekilde gösterilebilir ki $L\{f''(t)\} = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$ dır.

Bu taktirde f' ve f'' deki şartlar teoremdeki f ve f'' deki şartların aynısıdır. Ve Laplace transformu $s>a$ için doğrudur.

Örnek// $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0)=1$ $y'(0)=0$ denklemini Laplace transformu kullanarak çözünüz.

$$L\{y'' - y' - 2y\} = L\{0\}$$

$$\int_0^\infty e^{-st}(y''(t) - y'(t) - 2y(t))\,dt = 0$$

$$\int_0^\infty e^{-st} y''(t) - \int_0^\infty y'(t)dt - 2\int_0^\infty y(t)dt = 0$$

$$s^2 \underbrace{L\{y(t)\}}_{Y(s)} - sy(0) - y'(0) - sL\{y(t)\} + y(0) - 2L\{y(t)\} = 0$$

$$s^2Y(s) - s - sY(s) + 1 - 2Y(s) = 0$$

$$Y(s)(s^2-s-2) = s-1$$

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2} = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$$

$$\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} \Rightarrow \begin{array}{l} A+B=1 \\ -2A+B=-1 \end{array} \Rightarrow 3A=2 \quad A=2/3 \quad B=1/3$$

$$Y(s) = \frac{2/3}{s+1} + \frac{1/3}{s-2}$$

$$L^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = L^{-1}\left\{\frac{2/3}{s+1} + \frac{1/3}{s-2}\right\}$$

Ters Laplace transformu da lineer bir dönüşümdür. O halde,

$$L^{-1}\{Y(s)\} = \frac{2}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$= \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$$

Örnek// $y''-y'-6y=0 \quad y(0)=1, \; y'(0)=-1$

$$L\{y''(t)-y'(t)-6y(t)\} = L\{0\}$$

$$L\{y''(t)\} - L\{y'(t)\} - 6L\{y(t)\} = L\{0\}$$

$$s^2\underbrace{L\{y(t)\}}_{Y(s)} - sy(0) - y'(0) + y(0) - sL\{y(t)\} - 6L\{y(t)\} = 0$$

$$s^2Y(s) - s + 1 - sY(s) - 6Y(s) + 1 = 0$$

$$Y(s) = \frac{s-2}{s^2-s-6} = \frac{s-2}{(s+2)(s+3)} = \frac{1/5}{s-3} + \frac{4/5}{s+2}$$

$$L^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1/5}{s-3} + \frac{4/5}{s+2}\right\}$$

$$= \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \frac{4}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$= \frac{1}{5}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t}$$

Laplace Transformunun Bazı Özellikleri

Kabul edelim ki, f parçalı sürekli ve üstel bir fonksiyon olsun. Bu taktirde;

i- $L[f(at)] = \frac{1}{a}F(s/a)$ dir. $(a \neq 0)$

$$= \int_0^\infty e^{-st} f(at)\,dt \quad ; \quad at=u \quad dt=\frac{du}{a}$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-s\frac{u}{a}} f(u)\,du$$

$F(s)=\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du \Rightarrow L[f(at)]=\frac{1}{a}F(s/a)$ dir.

ii - $L\{t f(t)\}=-F'(s)$

$L\{t^2 f(t)\}=F'(s)$ $\qquad F'(s)=-\int_0^\infty u e^{-su}f(u)\,du$

$$L\{tf(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}t f(t)\,dt=-F'(s)$$

- $\overset{f(t)=1}{L[t]}=\frac{1}{s^2}$ $\quad \nearrow f(t)=\sin t \quad f''(t)=\boxed{-\sin t} \rightarrow \left\{ L\{f''(t)\}=s^2f'(t)-s(F(s)-sf(0)-f'(0) \right\}$
- $L\{-\sin t\}=s^2F(s)-1$

$-L\{\sin t\}=-F(s)=\underbrace{s^2F(s)-1}$

$$(1+s^2)F(s)=1 \Rightarrow F(s)=\frac{1}{1+s^2}=L\{\sin t\}$$

- $L\{\sin at\}=\frac{1}{a}\frac{1}{1+(\frac{s}{a})^2}=\frac{a}{s^2+a^2}$

$f(t)=\sin t \qquad f(at)=\sin at$

- $L\{t\sin at\}=\,?$ $\qquad \sin at=f(t)$

$$=-F'(s)=-\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)'=\frac{2as}{(s^2+a^2)^2} \quad //$$

- $L\{t\cos at\}=$

$$=\int_0^\infty e^{-st}t\cos at\,dt \qquad \begin{array}{l} e^{-st}dt=dv \\ v=-\frac{1}{s}e^{-st} \end{array}$$

$$=-\frac{1}{s}t\cos at+e^{-st}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty\frac{1}{s}e^{-st}(\cos at+at\sin at)\,dt$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{s}e^{-st}\cos at\,dt-\frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}t\sin at\,dt$$

$$e^{-st}dt=dv \quad -\frac{1}{s}e^{-st}=v$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{s}e^{-st}\cos at\,dt-\frac{a}{2}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}+\sin at\right)\Big|_0^\infty-\frac{a}{s^2}\int_0^\infty \underbrace{\sin at+at\cos at}_{e^{-st}\quad dt}$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{s}e^{-st}\cos at\,dt-\frac{a}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt-\frac{a^2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}t\cos at\,dt$$

$$\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)\int_0^\infty e^{-st}t\cos at\,dt=\frac{1}{s}\frac{s}{s^2+a^2}-\frac{a^2}{s^2}\frac{a}{s^2+a^2}=\frac{s^2-a^2}{s^2(s^2+a^2)}$$

$$(s^2+a^2)F(s)=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)} \Rightarrow F(s)=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

$$L\{\underbrace{t\cos at}_{f(t)}\}=-F'(s)=-\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)'=\frac{s^2+a^2-2s^2}{(s^2+a^2)^2}=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

Dönüşümün Ötelenmesi

Herhangi bir b sabiti için $L\{e^{bt}f(t)\} = ?$

$$F(s-b) = \int_0^\infty e^{-st}e^{bt}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t(s-b)}f(t)\,dt$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sb}f(t)\,dt \qquad F(s-b) = \int_0^\infty e^{-t(s-b)}f(t)\,dt$$

Bir Fonksiyonun Ötelenmesi

$L\{H(t-b)f(t-b)\} = e^{-bs}F(s)$ dir.

Buradaki $H(t)$, Heaviside birim fonksiyonu ve tanımı;

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \text{ için} \\ 1, & t>0 \text{ için} \end{cases}$$

$$H(t-b) = \begin{cases} 0, & t-b<0 \Rightarrow t<b \\ 1; & t-b>0 \Rightarrow t>b \end{cases}$$

$$L\{H(t-b)f(t-b)\} = \int_0^\infty e^{-st}H(t-b)f(t-b)\,dt$$

$t-b=u$ dersek $dt=du$

$$= \int_{-b}^\infty e^{-s(u+b)}H(u)f(u)\,du \qquad \left\{\begin{matrix} u<0 \Rightarrow H(u)=0 \\ u>0 \Rightarrow H(u)=1 \end{matrix}\right\}$$

$$= \int_0^\infty e^{-s(u+b)}f(u)\,du$$

$$= e^{-sb}\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du = e^{-sb}F(s) \;//$$

Örnek//

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0<t<1 \\ -2, & 1<t<6 \\ 3, & t>6 \end{cases}$$

parçalı sabit fonksiyonunu gözönüne alalım. $f(t)$ yi birim fonksiyonlar cinsinden ifade edin.

$$L\{H(t-T)\} = \int_0^\infty e^{-st}H(t-T)\,dt \qquad t-T=u \quad dt=du$$

$$= \int_{-T}^\infty e^{-s(u+T)}H(u)\,du = \int_0^\infty e^{-su}e^{-sT}H(u)\,du$$

$$= e^{-sT}\int_0^\infty e^{-su}\,du = \frac{1}{s}e^{-sT}$$

$L\{H(t-T)\} = e^{-ST}/s = \frac{1}{s}e^{-ST}$ dir.

Delta Fonksiyonu (Dirach)

$L\{\delta(t)\} = 1$ dir. Laplace transformu 1 olan hişbir fonksiyon yoktur. Buna rağmen Matematik olarak genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisi geliştirilebilir ki, burada δ fonksiyonu iyi tanımlıdır.

$$L\{\delta(t-T)\} = e^{-ST}$$

$$L\{H(t-T)\} = \frac{1}{s}e^{-ST}$$

$$H'(t-T) = e^{-ST} = \delta(t-T) \text{ dir.}$$

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$

birim fonksiyon türevlenemez sürekli değildir.

$$\delta * f(t) = \int_0^\infty \delta(1-\tau) f(\tau)\,d\tau = f(t) \text{ dir.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-T)dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

$AX''(t) + BX'(t) + CX(t) = f(t)$, $t>0$, $X(0)=P$, $X'(0)=Q$

başlangıç değer problemini gözönüne alıp, çözelim.

$$L\{AX''(t) + BX'(t) + CX(t)\} = L\{f(t)\}$$

$$As^2X(s) - AsX(0) - AX'(0) + BsX(s) - BX(0) + CX(s) = F(s)$$

$$X(s)(As^2+Bs+C) - AsP - AQ - BP = F(s)$$

$$X(s) = \frac{AsP - (AQ+BP)}{As^2+Bs+C} + \frac{F(s)}{As^2+Bs+C}$$

$$X(s) = G(s) + H(s)$$

$$H(s) = \frac{1}{As^2+Bs+C}F(s) = Y(s)F(s)$$

Buradaki $Y(s)$ fonksiyonu yukarıdaki verilen diferansiyel denklem için transfer fonksiyonu adını alır ve $Y(s)$ in ters laplace transformu, ağırlık fonksiyonu adını alır.

Aşağıdaki verilen fonksiyonların ters Laplace dönüşümünü bulunuz..

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-3s+2}\right\} = ?$$

Tanım : Kabul edelim ki, f(t) ve g(t), $[0,\infty)$ da parçalı ve sürekli olsun.

799

$$f*g(t)=\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

işlemine f ve g nin convolüsyon çarpımı denir. f*g şeklinde yazılır.

Aşağıdaki özellikleri vardır :

i- $f*g(t)=g*f(t)$

ii- $f*[(g+h)(t)]=f*g(t)+h*h(t)$

iii- $L\{f*g\}=F(s)G(s)$ dir.

örnek // $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$ $(\tau:\text{To})$

$$\frac{1}{(s^2+1)^2}=\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}=\frac{-1}{2s}\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1}$$

$$L\{f*g\}=L\left\{\int_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)d\tau\right\}$$

$$\sin a.\sin(a-b)=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$$

$$=\frac{\cos(\tau-t+\tau)}{2}-\frac{\cos(\tau+t-\tau)}{2}$$

$$L\left\{\left[\int_0^t \frac{1}{2}\cos(2\tau-t)-\frac{1}{2}\cos t\right]d\tau\right\}$$

$$=L\left\{\frac{1}{4}\sin(2\tau-t)-\frac{\tau}{2}\cos t\Big|_0^t\right\}$$

$$=L\left\{\frac{1}{4}\sin t-\frac{t}{2}\sin t+\frac{1}{4}\sin t\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}=\frac{1}{2}\sin t-\frac{t}{2}\cos t$$ // veya // $\frac{1}{2s}\Rightarrow\frac{1}{2}L\{1\}$

$$-\frac{d}{ds}(F(s))=-F'(s)\qquad L\{f*g\}=L\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \tau\sin\tau\, d\tau\right\}$$ aynı sonuç çıkar.

$F(s)\Downarrow\frac{1}{s^2+1}$, $F'(s)\Downarrow$ tsinat den.

örnek // $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}=?$

$$=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\}=L^{-1}\left\{L\left\{\int_0^t \sin\tau d\tau\right\}\right\}=-\cos\tau\Big|_0^t$$

$$=-\cos t+1=1-\cos t$$

Aşağıdaki fonksiyonların Laplace transformunu bulunuz.

a-
$$f(t)=\begin{cases} t, & 0<t<T \text{ ise} \\ 0, & t>\pi \text{ ise}\end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{s}\left(e^{-sT}+1\right)=L\{f(t)\}$$

Örnek//
$$y''+y'+\frac{5}{4}y=1-H(t-\pi) \qquad 1-H(t-\pi)=\begin{cases}1 & t<\pi \\ 0 & t\geq\pi\end{cases}$$

$$y(0)=0 \quad y'(0)=0$$

$$s^2Y(s)+sY(s)+\frac{5}{4}Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi s}}{s}$$

$$Y(s)=\frac{1-e^{-\pi s}}{s\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)}=\frac{1}{s\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)}-\frac{e^{-\pi s}}{s\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)}$$

$$\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+s+\frac{5}{4}} \qquad A+B=0 \quad A+C=0 \qquad \frac{5}{4}A=1 \quad A=\frac{4}{5}$$

$$C=-\frac{4}{5}=B$$

$$\left(1-e^{-\pi s}\right)\frac{4/5}{s}+\frac{-4/5\,s-\frac{4}{5}}{s^2+s+5/4}$$

$$=\left(1-e^{-\pi s}\right)\frac{4}{5}\left(\frac{1}{s}-\frac{s+1}{s^2+s+5/4}\right)=\frac{4}{5}\left(1-e^{-\pi s}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{s+1}{s^2+s+5/4}\right)$$

$$k(s)=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{s}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1/4}\right) \qquad k(t)=\frac{4}{5}-e^{-t}\cos\frac{1}{2}t$$

$$L\{f(t-\pi)H(t-T)\}=e^{-ts}F(s)$$

$$-L^{-1}\{e^{-\pi s}k(s)\}=\left(\frac{4}{5}-e^{-(t-\pi)}\cos\frac{1}{2}(t-\pi)\right)H(t-\pi)$$

$$y(t)=\frac{4}{5}-e^{-t}\cos\frac{1}{2}t-\left(\frac{4}{5}+e^{-(t-\pi)}\cos\frac{1}{2}t\right)H(t-\pi)$$

Örnek//
$$y''+4y=\begin{cases} t, & 0\leq t<\pi/2 \\ \pi/2, & t\geq\pi/2\end{cases} \qquad y(0)=y'(0)=0$$

$$t-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}t & t<\pi/2 \\ \pi/2 & t\geq\pi/2\end{cases}$$

$$L\{f(t-b)H(t-b)\}=e^{-bs}F(s)$$

$$f(t)=t \Rightarrow L\{f(t)\}=F(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$y''+4y=t-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$s^2Y(s)+4Y(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-\pi/2\cdot s}}{s^2}$$

$$=\frac{1}{s^2}\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}s}\right)$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2(s^2+4)}\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}s}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4}\right)\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}s}\right)$$

$$y(t)=\frac{t}{4}-\frac{1}{8}\sin 2t-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{8}\sin 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)H(t-\pi)$$

$y(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{8}\sin 2t + \frac{1}{8}\cos 2t \; H(t-\pi)$ //

örnek // $y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi) \qquad y(0) = y'(0) = 0$

$L\{y'' + 2y' + 2y\} = L\{\delta(t-\pi)\}$

$s^2Y(s) + 2sY(s) + 2Y(s) = e^{-\pi s}$

$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+2} = \frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2+1}$$

$$\left\{ L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} = e^{-t}\sin t \right\}$$

$L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2+1}\right\}$

$y(t) = e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi) = e^{\pi}e^{-t}\sin t \; H(t-\pi)$ //

örnek // $y'' + y = \delta(t-\pi) \cdot \cos t \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$

$s^2Y(s) + Y(s) - s\,y(0) - y'(0) - y(0) = -\delta(t-\pi)\cos(t-\pi)$

$-L\{\delta(t-\pi)\cos(t-\pi)\} = e^{-\pi s}$

$Y(s)(s^2+1) - 1 = -e^{-\pi s}$

$$Y(s) = \frac{1-e^{-\pi s}}{(s^2+1)} \Rightarrow L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1-e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}$$

$$y(t) = \sin t - H(t-\pi)\sin(t-\pi) = \begin{cases} \sin t & t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

örnek // $y'' + y = H(t-\frac{\pi}{2}) + \delta(t-\pi) - H(t-\frac{3\pi}{2}), \quad y(0) = y'(0) = 0$

$$s^2Y(s) + Y(s) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s} + e^{-\pi s} - \frac{e^{-\frac{3\pi}{2}s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1}\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s} + e^{-\pi s} - \frac{e^{-\frac{3\pi}{2}s}}{s}\right)$$

$$L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s(s^2+1)}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{3\pi}{2}s}}{s(s^2+1)}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right)e^{-\frac{\pi}{2}s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\} - L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}\right)e^{-\frac{3\pi}{2}s}\right\}$$

$$y(t) = H(t-\tfrac{\pi}{2}) - \cos(t-\tfrac{\pi}{2})H(t-\tfrac{\pi}{2}) + \sin(t-\pi)H(t-\pi) - H(t-\tfrac{3\pi}{2}) -$$

$$-\cos(t-\tfrac{3\pi}{2})H(t-\tfrac{3\pi}{2})$$

108 **Örnek//** $y'' - ty = 0 \quad y(0)=1 \quad y'(0)=0$ $\quad \left\{ L\{ty\} = -y'(s) \right\}$

$$s^2Y(s) - s + y'(s) = 0$$

$$y'(s) + s^2Y(s) = s \qquad Y(s) = ce^{-\frac{s^3}{3}} + e^{-\frac{s^3}{3}} \int e^{\frac{s^3}{3}} . s . ds$$

$$= ce^{-\frac{s^3}{3}} + e^{-\frac{s^3}{3}} \int \frac{1}{2} e^{\frac{u^{3/2}}{3}} du$$

Ödev// $(1-t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha+1)y = 0 \quad y(0)=0 \quad y'(0)=1$

(Legendre Denklemi)

Perturbation Serileri (Lineere yakın seriler)

Lineer olmayan diferansiyel denklemleri çözmek için bir önemli diğer metod da, perturbation metodudur. Bu metodu kullanmak için denklemde bulunan lineer olmayan terimin ε gibi küçük bir parametre olması gerekir. Bağımlı değişkeni kuvvet serisine açarak bir çözüm elde edebiliriz.

- Düffing'in denklemini gözönüne alalım.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ay + by^3 = 0 \qquad a=1 \quad b=\varepsilon, \; y(0)=1, \; y'(0)=0 \text{ olsun.}$$

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots$$

$$(y_0''(x) + \varepsilon y_1''(x) + \varepsilon^2 y_2''(x)) + (y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x)) + \varepsilon(y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x))^3 = 0$$

$$y_0''(x) + y_0(x) + \varepsilon(y_1''(x) + y_1(x) + y_0^3(x)) + \varepsilon^2(y_2''(x) + y_2(x) + 3y_0^2(x)y_1(x)) + \varepsilon^3(\ldots = 0$$

$$y_0''(x) + y_0(x) = 0, \quad y_1''(x) + y_1(x) + y_0^3(x) = 0, \quad y_2''(x) + y_2(x) + 3y_0^2(x)y_1(x) = 0$$

$$1 = y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \varepsilon^2 y_2(0) + \ldots$$

$$0 = y_0'(0) + \varepsilon y_1'(0) + \varepsilon^2 y_2'(0) + \ldots$$

$$y(0)=1 \quad y'(0)=0, \quad y_1(0) = y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0 = y_2'(0)$$

$$y_0(X) = \cos X, \quad y_1''(x) + y_1(x) = -\cos^3 X,$$

$$~~y~~ y_h = c_1\cos X + c_2 \sin X$$

$$y_{öç} = c_1(x)\cos X + c_2(x)\sin X$$

$$c_1'(X) = \frac{\sin X \cos^3 X}{1} \Rightarrow c_1(x) = -\frac{\cos^4 X}{4}$$

$$c_2(x) = \frac{\cos^4 X}{1} \Rightarrow c_2(x) = \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}\sin 2X - \frac{1}{8}\cos 2X$$

$$y_{öç} = -\frac{\cos^5 X}{5} + \sin x\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{4}\sin 2X - \frac{1}{8}\cos 2X\right)$$

$y_{1GÇ}=y_{1TÇ}(x)+y_{1ÖÇ}(x)$ daha sonra $y_1(0)=0=c_1-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow c_1=\frac{1}{4}$

$y_1'(0)=-c_2-\frac{1}{8} \Rightarrow c_2=-\frac{1}{8}$

$y_1(x)=\frac{1}{4}\cos x-\frac{1}{8}\sin x-\frac{\cos^5 x}{4}+\sin x\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x\right)$

$y=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\dots$

$y=\cos x+\varepsilon\left(\frac{1}{4}\cos x-\frac{1}{8}\sin x-\frac{\cos^5 x}{4}+\sin x\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x\right)+\varepsilon^2+\dots\right.$

ε^2 ve diğerlerini bulmak uzun olduğundan yapılmayacaktır.

örnek// $y'=f(x)-\varepsilon y^2$, $y(\alpha)=\beta$ $y(0)=0$, $f(x)=1$

$y'=1-\varepsilon y^2$ $\frac{dy}{1-\varepsilon y^2}=dx$

$\int\frac{dy}{1-(\sqrt{\varepsilon}y)^2}=\int dx$ $\sqrt{\varepsilon}y=u$ $\sqrt{\varepsilon}\,dy=du$

$x=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\frac{du}{1-u^2} \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\tan^{-1}h\sqrt{\varepsilon}y+c$

$y=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\tanh\sqrt{\varepsilon}x$

$y'=1-\varepsilon y^2$ $y=y_0+\varepsilon y_1+\dots$

$(y_0'+\varepsilon y_1')=1-\varepsilon(y_0+\varepsilon y_1)^2$

$y_0'=1 \Rightarrow y_0=x$

$y_1'+y_0^2=0 \Rightarrow y_1'=-y_0^2 \Rightarrow y_1'=-x^2 \Rightarrow y_1=-\frac{x^3}{3}$

$y=x-\frac{x^3}{3}$ ($\text{th}\,x$ in taylor açılımıdır.)

$y(x,e)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\dots$ ile Taylor açılımı arasındaki ilişki nedir?

W.K.B. (Wentzel - Kramers - Brillouin) Yaklaşımı

$\varepsilon^2\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)y$ ... (1)

ε: parametre

$f(x)$: verilen fonksiyon

Kabul edelim ki, $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$ verilmiş olsun. Bu taktirde denklemin çözümü vardır. Bu denklemlere W.K.B metodu uygulanır.

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0\\ y=u(x)v(x) \qquad \Rightarrow u''(x)+f(x)u=0 \text{ idi.}\end{array}\right\}$$

Özel olarak, $\varepsilon^2 \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, $y(0)=0$, $y(1)=1$ sınır değer problemi verilmiş olsun. Bu diferansiyel denklemin çözümüne bakalım.

$$\varepsilon^2 \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \mp i \, 1/\varepsilon \qquad (y = e^{\lambda x} \text{ yazarak})$$

$$y = c_1 \cos x/\varepsilon + c_2 \sin x/\varepsilon \ldots \Rightarrow c_1 = 0$$

$$1 = c_2 \sin 1/\varepsilon \Rightarrow c_2 = 1/\sin(1/\varepsilon) \qquad y = \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\sin 1/\varepsilon}$$

Burada Perturbation kullanılamaz.

W.K.B metodu (1) denkleminde y'yi,

$$y = e^{1/\varepsilon \int^x [S_0(t) + \varepsilon S_1(t) + \varepsilon^2 S_2(t) + \ldots] dt} \ldots ②$$

şeklinde çözümünün olduğunu kabul ederek buluruz.

$$y' = \frac{1}{\varepsilon}[S_0(x) + \varepsilon S_1(x) + \varepsilon^2 S_2(x) + \ldots] \underbrace{e^{\frac{1}{\varepsilon}\int^x [S_0(t) + \varepsilon S_1(t) + \varepsilon^2 S_2(t) + \ldots] dt}}_{y(x)}$$

$$y'' = \frac{1}{\varepsilon}[S_0'(x) + \varepsilon S_1'(x) + \varepsilon^2 S_2'(x) + \ldots] y(x) + \frac{1}{\varepsilon^2}[S_0(x) + \varepsilon S_1(x) + \varepsilon^2 S_2(x) + \ldots]^2 y(x)$$

Denklemde yerine yazarsak,

$$\varepsilon^2\left(\left[\frac{1}{\varepsilon^2}(S_0(x) + \varepsilon S_1(x) + \varepsilon^2 S_2(x) + \ldots)\right]^2 + \frac{1}{\varepsilon}[S_0'(x) + \varepsilon S_1'(x) + \varepsilon^2 S_2'(x) + \ldots]\right) \cancel{y(x)} = f(x) \cancel{y(x)}$$

$$S_0^2(x) = f(x)$$

$$2 S_0(x) S_1(x) + S_0'(x) = 0 \qquad S_1(x) = -\frac{S_0'(x)}{2 S_0(x)} \Rightarrow -\frac{1}{2} \ln S_0(x) = \int^x S_1(t) dt$$

$$\Rightarrow [S_0(x)]^{-1/2} = e^{\int^x S_1(t) dt} \Rightarrow S_0(x) = e^{-2\int^x S_1(t) dt}$$

$$e^{\int^x S_1(t) dt} = [S_0(x)]^{-1/2} = [f(x)]^{-1/4}$$

$$y = [f(x)]^{-1/4} e^{\pm \frac{1}{\varepsilon} \int^x [f(t)]^{1/2}}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{A}{[f(x)]^{1/4}} e^{1/\varepsilon \int^x (f(t))^{1/2} dt} + \frac{B}{[f(x)]^{1/4}} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int^x (f(t))^{1/2} dt}}$$

Örnek// $\varepsilon^2 \frac{d^2y}{dx^2} = (1+x^2)^2 y$, $y(0)=0$, $y(1)=1$ denkleminin yaklaşık çözümünü bulunuz.

$$f(x) = (1+x^2)^2 \qquad y(x) = \frac{A}{(1+x^2)^{1/2}} e^{1/\varepsilon \int^x (1+t^2) dt} + \frac{B}{(1+x^2)^{1/2}} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int^x (1+t^2) dt}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$y(x) = \frac{A}{(1+x^2)^{1/2}} e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)} + \frac{B}{(1+x^2)^{1/2}} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)}$$

$y(1) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{A}{\sqrt{2}} e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(1+\frac{1}{3}\right)} + \frac{B}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)}$ veya $A = -B$ yazarsak,

$$y(x) = \frac{A}{(1+x^2)^{1/2}}\left(e^{1/\varepsilon\left(x+\frac{x^3}{3}\right)} - e^{-1/\varepsilon\left(x+\frac{x^3}{3}\right)}\right) = \frac{2A}{(1+x^2)^{1/2}} \sinh \frac{1}{3}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)$$

$$1 = \frac{A}{\sqrt{2}}\left(e^{1/\varepsilon\left(1+\frac{1}{3}\right)} - e^{-1/\varepsilon\left(1+\frac{1}{3}\right)}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2 \sinh \frac{4\varepsilon}{3}}$$

$$y(x) = \frac{\sqrt{2}}{(1+x^2)^{1/2}} \cdot \frac{\sinh \frac{1}{\varepsilon}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)}{\sinh \frac{1}{\varepsilon}\frac{4\varepsilon}{3}}$$

örnek // $\varepsilon^2 \frac{d^2y}{dx^2} = -xy$

$f(x) = -x$

$$y(x) = \frac{A}{(-x)^{1/4}} e^{1/\varepsilon \int^x (-t)^{1/2} dt} + \frac{B}{(-x)^{1/4}} e^{-1/\varepsilon \int^x (-t)^{1/2} dt}$$

$$= \frac{A}{(-x)^{1/4}} e^{\frac{2}{3\varepsilon}} i x^{3/2} + \frac{B}{(-x)^{1/4}} e^{-\frac{2}{3\varepsilon}} i x^{3/2}$$

nek // $\frac{d}{dy^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3\right) = 0$

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y(h) = 1 \quad y'(h) \equiv -1$

$\frac{d}{dy}\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3\right) = c_1 x \qquad c_1 = (c_{00} + c_{01}\alpha + c_{02}\alpha^2)$ diyelim.

$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = c_1 x + c_2 \qquad y''(0) = 0 \qquad c_2 = 0$

1°) Eğer α küçük bir parametre ise Perturbation metodu uygulanır.

$$y(x) = y_0(x) + \alpha y_1(x) + \alpha^2 y_2(x)$$

$$\left(y_0'' + \alpha y_1''(x) + \alpha^2 y_2''(x) + \dots\right) + \alpha\left(y_0'' + \alpha y_1'' + \alpha^2 y_2'' + \dots\right)^3 = c_1 x$$

$y_0'' = c_{00} x \Rightarrow y_0(x) = c_2 + c_3 x + \frac{c_1}{6} x^3$

$y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} y_0(h) = 1 \\ y_1(h) = 0 \\ y_2(h) = 0 \end{array}\right\} \text{olsun.}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(h) = +1 \Rightarrow c_3 h + \frac{c_{00}}{6} h^3 = +1 \\ y'(h) = 1 \Rightarrow c_3 + \frac{c_{00}}{2} h^2 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{2}{6} c_1 h^3 = 1 + h$$

$$\Rightarrow c_{00} = -\frac{3(1+h)}{h^3}$$

$$c_3 = 1 + \frac{1}{2}(1+h) = h + 3/2$$

$$y_0(x) = \left(h+\frac{3}{2}\right)x - \frac{1}{2}(1+h)\left(\frac{x}{h}\right)^3 \quad //$$

$$y_1''(x) + y_0''^3 = c_{01}x \qquad y_1''(x) = c_{01}x - (c_{00}x)^3$$

$$\Rightarrow y_1(x) = c_2 + c_3x + \frac{c_{01}}{6}x^3 - \frac{1}{20}c_{00}x^5$$

$$y_1(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y_1(h) = 0 = c_3h + \frac{c_{01}}{6}h^3 = \frac{1}{20}c_{00}h^5$$

$$y_1'(h) = 0 = c_3 + \frac{c_{01}}{2}h^2 = \frac{1}{4}c_{00}h^4$$

$$\frac{1}{2}h^3c_{01} = \frac{1}{5}c_{00}h^5 \qquad c_{01} = \frac{2}{5}c_{00}h^2 = -\frac{2}{5}\cdot\frac{3(1+h)}{h^3}h^2$$

$$c_{01} = -\frac{6}{5}\frac{(1+h)}{h} \quad //$$

$$c_3 = \frac{-3}{4}(1+h)h + \frac{6}{10}(1+h)h = -\frac{3}{20}h(1+h)$$

$$y(x) = y_0(x) + \alpha y_1(x) + \alpha^2y_2(x) + \dots$$

$$= \left(h+\frac{3}{2}\right)x - \frac{1}{2}(1+h)\left(\frac{x}{h}\right)^3 + \alpha\left(-\frac{3}{20}h(1+h)x - \frac{6}{5}\frac{(1+h)}{h}x^3 + \frac{1}{20}\frac{27(1+h}{9}\cdot x^5\right) + \alpha^2 \dots$$

2°) $\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = c_1x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \underbrace{\sqrt[3]{\frac{c_1x}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{c_1x}{2\alpha}\right)^2 + \frac{1}{27\alpha^3}}}}_{g_1(x)} + \underbrace{\sqrt[3]{\frac{c_1x}{2\alpha} - \sqrt{\frac{c_1x}{2\alpha} + \frac{1}{27\alpha^3}}}}_{g_2(x)}$$

Parametrelerin değişme metodu'ndan :

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

$$U_1'(x) = \frac{-y_2(x)g(x)}{W(y_1,y_2)(x)}$$

$$U_1(x) = -\int x\sqrt[3]{\frac{c_1x}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{c_1x}{2\alpha}\right)^2 + \frac{1}{27\alpha^3}}}\,dx$$

$$\frac{c_1x}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{c_1x}{2\alpha}\right)^2 + \frac{1}{27\alpha^3}} = t \Rightarrow \cancel{\left(\frac{c_1x}{2\alpha}\right)^2} + \frac{1}{27\alpha^3} = t^2 - \frac{c_1xt}{\alpha} + \cancel{\left(\frac{c_1x}{2\alpha}\right)^2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\alpha}{c_1}\left(t - \frac{1}{27\alpha^3t}\right) \qquad dx = \frac{\alpha}{c_1}\left(1 - \frac{1}{27\alpha^3t^2}\right)dt$$

$$U_1 = \int\frac{\alpha}{c_1}\left(t - \frac{1}{27\alpha^3t}\right)t^{1/3}\frac{\alpha}{c_1}\left(1 + \frac{1}{27\alpha^3t}\right)dt$$

$$c_3 = 1 + \frac{1}{2}(1+h) = h + 3/2$$

$$y_0(x) = \left(h + \frac{3}{2}\right)x - \frac{1}{2}(1+h)\left(\frac{x}{h}\right)^3 \quad //$$

$$y_1''(x) + y_0''^3 = c_{01}x \qquad y_1''(x) = c_{01}x - (c_{00}x)^3$$

$$\Rightarrow y_1(x) = c_2 + c_3 x + \frac{c_{01}}{6}x^3 - \frac{1}{20}c_{00}x^5$$

$$y_1(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y_1(h) = 0 = c_3 h + \frac{c_{01}}{6}h^3 = \frac{1}{20}c_{00}h^5$$

$$y_1'(h) = 0 = c_3 + \frac{c_{01}}{2}h^2 = \frac{1}{4}c_{00}h^4$$

$$\frac{1}{2}h^3 c_{01} = \frac{1}{5}c_{00}h^5 \qquad c_{01} = \frac{2}{5}c_{00}h^2 = -\frac{2}{5}\cdot\frac{3(1+h)}{h^3}h^2$$

$$c_{01} = -\frac{6}{5}\frac{(1+h)}{h} \quad //$$

$$c_3 = -\frac{3}{4}(1+h)h + \frac{6}{10}(1+h)h = -\frac{3}{20}h(1+h)$$

$$y(x) = y_0(x) + \alpha y_1(x) + \alpha^2 y_2(x) + \ldots$$

$$= \left(h + \frac{3}{2}\right)x - \frac{1}{2}(1+h)\left(\frac{x}{h}\right)^3 + \alpha\left(-\frac{3}{20}h(1+h)x - \frac{6}{5}\frac{(1+h)}{h}x^3 + \frac{1}{20}\frac{27(1+h}{9} \cdot x^5\right) + \alpha^2 - \ldots$$

2°) $$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = c_1 x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \underbrace{\sqrt[3]{\frac{c_1x}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{c_1x}{2\alpha}\right)^2 + \frac{1}{27\alpha^3}}}}_{g_1(x)} + \underbrace{\sqrt[3]{\frac{c_1x}{2\alpha} - \sqrt{\frac{c_1x}{2\alpha} + \frac{1}{27\alpha^3}}}}_{g_2(x)}$$

Parametrelerin değişme metodu'ndan:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

$$u_1'(x) = \frac{-y_2(x)g(x)}{w(y_1, y_2)(x)}$$

$$u_1(x) = -\int x\sqrt[3]{\frac{c_1x}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{c_1x}{2\alpha}\right)^2 + \frac{1}{27\alpha^3}}}\,dx$$

$$\frac{c_1x}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{c_1x}{2\alpha}\right)^2 + \frac{1}{27\alpha^3}} = t \Rightarrow \left(\frac{c_1x}{2\alpha}\right)^2 + \frac{1}{27\alpha^3} = t^2 - \frac{c_1xt}{\alpha} + \left(\frac{c_1x}{2\alpha}\right)^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{\alpha}{c_1}\left(t - \frac{1}{27\alpha^3 t}\right) \qquad dx = \frac{\alpha}{c_1}\left(1 - \frac{1}{27\alpha^3t^2}\right)dt$$

$$u_1 = \int \frac{\alpha}{c_1}\left(t - \frac{1}{27\alpha^3 t}\right)t^{1/3}\frac{\alpha}{c_1}\left(1 + \frac{1}{27\alpha^3 t}\right)dt$$

$$= -\frac{\alpha^2}{c_1^2}\int t^{4/3}\left(1-\frac{1}{27.27.\alpha^6 t^2}\right)dt$$

$$= -\frac{\alpha^2}{c_1^2}\left(\frac{3}{7}t^{7/3} - \frac{1}{27.27\alpha 6}t^{1/3}\right)$$

$$v_1(x) = -\frac{\alpha 2}{c_1^2}\left(\frac{3}{7}\left(\frac{c_1x}{2\alpha}+\sqrt{\left(\frac{c_1x}{2\alpha}\right)^2+\frac{1}{27\alpha^3}}\right)\right)^{7/3} - \frac{1}{9.27\alpha 6}\left(\frac{c_1x}{2\alpha}+\sqrt{\left(\frac{c_1x}{2\alpha}\right)^2+\frac{1}{27\alpha 3}}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[3]{\frac{cx}{2\alpha}+\sqrt{\left(\frac{cx}{2\alpha}\right)^2+\frac{1}{27\alpha 3}}} + \sqrt[3]{\frac{cx}{2\alpha}-\sqrt{\left(\frac{cx}{2\alpha}\right)^2+\frac{1}{27\alpha 3}}}$$

$\sqrt{\frac{27}{4}}\,cx\sqrt{\alpha} = a$ denir.

$$= \frac{1}{\sqrt{3\alpha}}\left(\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}cx\sqrt{\alpha}}{2}+\sqrt{\frac{27c^2x^2\alpha}{4}+1}} + \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}cx\sqrt{\alpha}}{2}-\sqrt{\frac{27c^2x^2\alpha}{4}+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3\alpha}}\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{1+a^2}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{1+a^2}}\right) = \frac{4\alpha}{27}\frac{d^2y}{da^2}$$

$$dx = \frac{2\sqrt{\alpha}}{3\sqrt{3}}da\,,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{da}{dx}\cdot\frac{dy}{da}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{3\sqrt{3}}\ \frac{dy}{da}\right)$$

$$= \frac{da}{dx}\frac{d}{da}\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{dy}{da}\right) = \frac{4\alpha}{27}\cdot\frac{d^2y}{da^2}$$

$|a|<1$ ise ikinci tarafı Taylor serisine açalım.

$$= \frac{1}{\sqrt{3\alpha}}\left(0+\frac{2}{3}a-\frac{8}{81}a^3+\cdots\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{3\alpha}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{27}{4}}\,cx\sqrt{\alpha} - \frac{8}{81}\ \frac{27.3\sqrt{3}}{8}\alpha\sqrt{\alpha}\,c^3x^3+\cdots\right)$$

$$= \left(cx - c^3x^3\alpha^2+\cdots\right)$$

$$c = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2$$

$$F(x,\alpha) = F_0 + \alpha\left.\frac{dF}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} + \alpha^2\left.\frac{d^2F}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0}$$

$$F_0 = \lim_{\alpha\to 0} F(x,\alpha)$$

$$F(x,\alpha) = \left((c_0+c_1\alpha+c_2\alpha^2+\ldots)x - (c_0+c_1\alpha+c_2\alpha^4\ldots)^3\alpha x^3+\ldots\right)$$

$$F(x,\alpha) = c_0x + (c_1x - c_0x^3)\alpha + (2c_2x - 6c_0^2c_1x^3 + c_0^5x^5)+\ldots = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$y(x) = \cancel{a_0} + \overset{\to b_0+b_1\alpha+b_2\alpha^2}{a_1}x + \frac{c_0}{6}x^3 + \left(\frac{c_1}{6}x^3 - \frac{c_0}{20}x^5\right)\alpha + \left(c_2\frac{x^3}{3} - \frac{6}{20}c_0^2c_1x^5 + \frac{c_0^5}{42}x^7\right)\alpha^2$$

$x=0\quad y(0)=0 \Rightarrow a_0=0$ dır. $\quad y(h)=1\quad y'(h)=-1$

$a_1 h + \frac{c_0}{6} h^3 = 1$, $a_1 + \frac{c_0}{2} h^2 = -1$ buradan a_1 ve c_0 bulunur.

$a_1 = b_0 + b_1 \alpha + b_2 \alpha^2$

$b_1 h + \frac{c_1}{6} h^3 = \frac{c_0}{20} h^5 \Rightarrow b_1 + \frac{c_1}{2} h^2 = \frac{c_0}{4} h^4$ buradan b_1 ve c_1 bulunur.

Böylece çözüm elde edilmiş olur.

{Bu denklem; diyaliz makinalarındaki hortumlardan akan sıvının, hangi hızda hangi basınçta ve ne kadar kalınlıkta bir hortumla hastaya enjekte edileceğini anlamamıza yardımcı olmaktadır.}

$$u_2'(x) \quad \frac{\begin{vmatrix} 1 & g(x) \end{vmatrix}}{\omega}$$

Ütüler

Füller

$$\boxed{f(t) = \begin{cases} 1, & 0<t<1 \\ -2, & 1<t<6 \\ 3, & t>6 \end{cases}}$$

$$f(t) = 1 - H(t-1) = \begin{cases} 1 & 0<t<1 \\ 0 & t>1 \end{cases}$$

~~$f(t) = 6 - H(t-1)$~~

$1 \quad t<0$

$\quad\; t>0$

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 e^{-st}\,1\,dt + \int_1^6 e^{-st}(-2)\,dt + \int_6^{\infty} e^{-st}\,3\,dt$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^1 + (-2) - \frac{1}{s}e^{-st}\Big|_1^6 + 6 - \frac{1}{s}e^{-st}\Big|_6^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\Big|_0^1 - 2e^{-st}\Big|_1^6 + 6e^{-st}\Big|_3^{\infty}\right]$$

$$= -\frac{1}{s}\left[\frac{1}{e^{st}}\Big|_0^1 - \frac{2}{e^{st}}\Big|_1^6 + \frac{6}{e^{st}}\Big|_3^{\infty}\right]$$

$$= -\frac{1}{s}\left[\left(\frac{1}{e^s} - 1\right) - \left(\frac{2}{e^{6s}} - \frac{2}{e^s}\right) + 6\left(\frac{6}{\infty} - \frac{6}{e^{3s}}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{s}\left[\frac{1}{e^s} - 1 - \frac{2}{e^{6s}} + \frac{2}{e^s} + 0 - \frac{6}{e^{3s}}\right]$$

$$= -\frac{1}{s}\left[\underset{(e^{5s})}{\frac{3}{e^s}} - \underset{(1)}{\frac{2}{e^{6s}}} - \underset{(e^{3s})}{\frac{6}{e^{3s}}} - \underset{(e^{6s})}{1}\right]$$

~~$e^x + e^{2x} =$~~

~~$e^x(1+e^x)$~~

$$L\{f(t)\} = -\frac{1}{s}\left[\frac{3e^{5s} - 2 - 6e^{3s} - e^{6s}}{e^{6s}}\right]$$

Defterdeki son

örnek

$$v_3'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \sin & \cos & \sin 3x & 0 \\ \cos & -\sin & 3\cos 3x & 0 \\ -\sin & -\cos & -9\sin 3x & 0 \\ -\cos & \sin & -27\cos 3x & -\sin x \end{vmatrix}}{-192}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -8\sin 3x & 0 \\ -\sin & -\cos & -24\cos 3x & \sin x \\ -\cos & \sin & -9\sin 3x & 0 \\ & & -27\cos 3x & -\sin x \end{vmatrix}$$

12,2
24.8
16.12

$$\begin{array}{r|l} 192 & 16 \\ 16 & \overline{12} \\ \overline{32} & \end{array}$$

$$= \cancel{4} - \frac{(-\sin^2 x - \cos^2 x)(16 \sin x \sin 3x)}{-192}$$

$$-\frac{1}{12} \sin x \sin 3x$$

$\sin x . (\sin 2x + x)$

$\sin x (\sin 2x \cos x + \cos 2x \cos x)$

$\cancel{\sin} \left[(2 \sin^2 x \cos^2 x) + \underset{(1 - 2\sin^2 x)}{(\cos^2 x - \sin^2 x)} \cos x) \right]$

~~1 - 2~~ ~~2cos~~

~~1 - 2~~

$$y'' - 3y' + 6 = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

$e^{xr}(r^2 - 5r + 6) = 0 \qquad y_t = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$

$\begin{pmatrix} r & -3 \\ r & -2 \end{pmatrix}$

$y_{\text{öç}} = u_1(x) e^{3x} + u_2 x e^{2x}$

$u_1'(x) e^{3x} + u_2'(x) e^{2x} = 0$

$3 u_1'(x) e^{3x} + 2 u_2'(x) e^{2x} = 0$

$$\begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} \\ 3e^{3x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} =$$

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ \frac{e^{3x}}{x^2} & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\text{det.}} \qquad \int$$

~~2e~~

$2e^{3x} - 3e^{4x}$

$e^{3x}(2 - 3e^{x})$

$$\begin{vmatrix} e^{3x} & 0 \\ 3e^{3x} & \frac{e^{3x}}{x^2} \end{vmatrix}$$

Teorem

$x^2y''+axy'+by=0$ dif den. nin $x_0=0$ d noktası denk. düz tek. nok. ~~bu~~ den olduğunu bulmalıyız.

Bu denklemin $y=e^{xr}$ form. çöz. araştırılır. Bu denklemde yerine yazılır.

$$x^2r(r-1)x^{r-2}+axrx^{r-1}+bx^r=0$$

$$x^r(r(r-1)+ar+b)=0 \qquad F(r)=r^2+(a-1)r+b=0$$

$$r_{1,2}=\frac{(1-a)\mp\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2}$$ $r_1\neq r_2$ olsun.

r_1 ve r_2 bir $\mathbb{R}$ sayı ve bu kökleri birbirinden farklı olsun. O zaman $y=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_2}$ form. bir çöz. sah. olacak. Kabul ed. ki $r_1=r_2$ ols. Bu takdirde $y=x^r(c_1+c_2\ln x)$ dır.

$$\boxed{r(r-1)+P(0)r+q(0)=0}$$ İNDİSEL Denklem.

● $x^2y''+\dots$ …

p(

Önemli